

Código de Alumno:

Duración: 30 minutos

Fecha: 23 de abril de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. [8 pts] Se desea aproximar la raíz de la ecuación: $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x}) + 1}{5} + \sin(x) - x = 0$, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Considere la siguiente reformulación equivalente en la forma de punto fijo $x = g(x)$:

$$g(x) = \frac{\ln(\sqrt{x}) + 1}{5} + \sin(x)$$

- a) **[3 pts]** Verifique si $g(x)$ cumple la condición de existencia: $x \in [a, b] \longrightarrow g(x) \in [a, b]$
- b) **[2 pts]** Considerando que $g(x)$ cumple la condición de contracción, para cualquier punto semilla $x_0 \in [a, b]$, entonces el método de punto fijo con la función $g(x)$ dada (converge / diverge / no se sabe). Nota: puntaje solo con resultado de (a).

- c) **[3 pts]** Efectúe 2 iteraciones del método de punto fijo usando un punto semilla $x_0 = \frac{\pi}{3}$

[illegible]

2. [12 pts] Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}\cos(x^2) + y &= 8 \\ x^{-3} + x \sin(y) &= 2\end{aligned}$$

Complete lo siguiente considerando $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ y un punto semilla de $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}^T$

a) [2 pts] Defina el vector función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.4597 \\ -0.3430 \end{bmatrix}$:

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) =$

b) [2 pts] Halle la matriz Jacobiana $J_F(\mathbf{x}) =$

c) [3 pts] Determine la primera aproximación utilizando el método de Newton con punto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$:

d) [3 pts] Halle la segunda aproximación utilizando el método de Newton:

e) [2 pt] Determine el error relativo en la segunda iteración empleando la norma infinita $\|\cdot\|_\infty$: