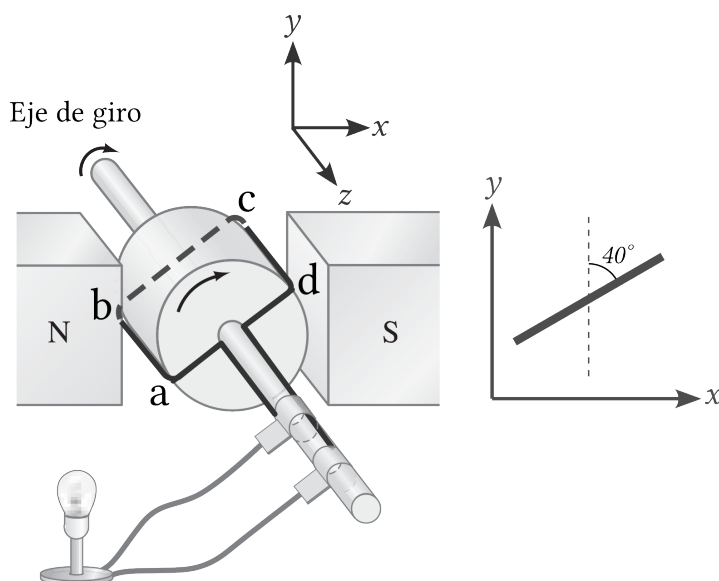




Problema 1 — (6 puntos) En la figura se muestra un generador eléctrico cuya espira gira en sentido horario con rapidez angular constante de 60 rad/s , tal como se indica. La espira es cuadrada, de lado 11 cm , y posee una resistencia interna de 17Ω . Además, se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme de magnitud $0,19 \text{ T}$.

Nota: A la derecha se presenta una vista de la espira observada desde el eje $+z$, donde se indica su orientación angular.

a) (1,5 punto) Dibuje el sentido de la corriente inducida en el instante mostrado. Justifique su respuesta.

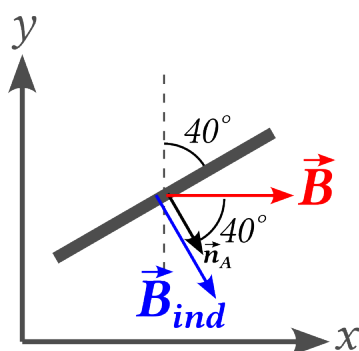


En el instante mostrado, la espira gira en sentido horario, por lo que el ángulo entre el campo magnético externo $\vec{B}$ y el vector normal $\hat{n}_A$ aumenta. En consecuencia, el flujo magnético en la dirección de $\hat{n}_A$ disminuye.

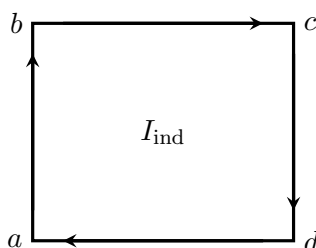
De acuerdo con la **ley de Lenz**, la corriente inducida debe producir un campo magnético que se oponga a esta disminución. Por ello, el campo magnético inducido $\vec{B}_{\text{ind}}$ apunta en la dirección de $\hat{n}_A$.

Aplicando la regla de la mano derecha, la corriente inducida circula según

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a.$$



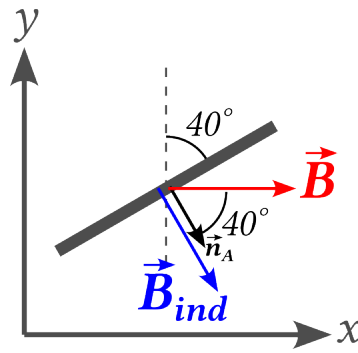
Por tanto, en el esquema de la espira, la corriente inducida circula en **sentido horario**.



b) (3 puntos) Determine la expresión de la fem inducida a través de la espira en función del tiempo.

La espira es cuadrada, por lo que su área es

$$A = \ell^2 = (0,11)^2 = 1,21 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$



De acuerdo con la figura, en el instante inicial el ángulo entre el campo magnético externo $\vec{B}$ y el vector normal $\hat{n}_A$ es

$$\theta_0 = 40^\circ.$$

Como la espira gira en sentido horario con rapidez angular constante, el ángulo aumenta con el tiempo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t = 40^\circ + 60t.$$

El flujo magnético a través de la espira es

$$\Phi_B(t) = BA \cos \theta(t),$$

por lo que

$$\Phi_B(t) = BA \cos(40^\circ + 60t).$$

Aplicando la ley de Faraday–Lenz,

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Entonces,

$$\mathcal{E}(t) = BA\omega \sin(40^\circ + 60t).$$

La amplitud de la fem inducida es

$$\mathcal{E}_0 = BA\omega = (0,19) (1,21 \times 10^{-2}) (60),$$

$$\mathcal{E}_0 = 0,13794 \text{ V}.$$

Por tanto, la fem inducida en función del tiempo es

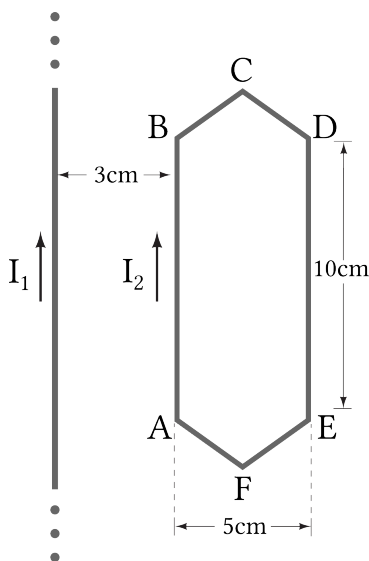
$$\mathcal{E}(t) = 0,138 \sin\left(60t + \frac{2\pi}{9}\right) \text{ V}$$

$$\mathcal{E}(t) = 0,138 \sin(60t + 40^\circ) \text{ V}.$$

c) (1,5 puntos) Indique si se trata de un generador de corriente alterna (AC) o de corriente continua (DC). Justifique su respuesta.

Se trata de un generador de corriente alterna (AC), ya que la fem inducida varía periódicamente y cambia de signo cada media vuelta. En consecuencia, la corriente inducida invierte su sentido cada media revolución de la espira.

Problema 2 — (5,5 puntos) En la figura se muestra un alambre recto y muy largo que transporta una corriente $I_1 = 4,6 \text{ A}$ hacia arriba. A la derecha del alambre se ubica una espira hexagonal conductora $ABCDEF$, la cual transporta una corriente $I_2 = 4,2 \text{ A}$ en el sentido indicado. La espira tiene un ancho de 5 cm y sus lados verticales AB y DE tienen una longitud de 10 cm. Además, el lado vertical AB se encuentra a una distancia de 3 cm del alambre largo. Considere únicamente el campo magnético producido por el alambre largo y desprecie cualquier otro campo externo.



a) (2 puntos) Determine la fuerza magnética que actúa sobre el segmento AB de la espira debido únicamente a I_1 .

El campo magnético producido por la corriente I_1 en la posición del segmento AB es

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

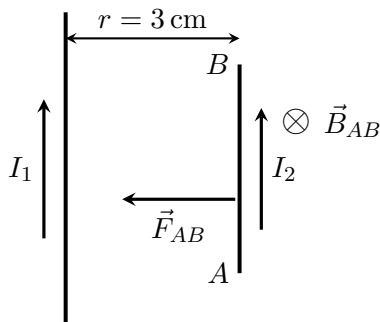
Sustituyendo los valores:

$$B_{AB} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) (4,6)}{2\pi(0,03)},$$

$$\boxed{B_{AB} = 3,07 \times 10^{-5} \text{ T}}.$$

Aplicando la regla de la mano derecha, como AB se encuentra a la derecha del alambre y la corriente I_1 circula hacia arriba, el campo magnético en AB ingresa al plano de la figura:

$$\vec{B}_{AB} = - (3,07 \times 10^{-5}) \hat{k} \text{ T}.$$



La longitud vectorial del segmento AB , cuya corriente circula desde A hacia B , es

$$\vec{L}_{AB} = (0,10)\hat{j} \text{ m}.$$

La fuerza magnética sobre el segmento se determina mediante

$$\vec{F}_{AB} = I_2 \vec{L}_{AB} \times \vec{B}_{AB}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_{AB} = (4,2) (0,10\hat{j}) \times [- (3,07 \times 10^{-5}) \hat{k}].$$

Como

$$\hat{j} \times (-\hat{k}) = -\hat{i},$$

se obtiene

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -12,89 \times 10^{-6} \hat{i} \text{ N}}.$$

Por lo tanto, la magnitud de la fuerza es

$$\boxed{F_{AB} = 12,89 \times 10^{-6} \text{ N}}$$

y está dirigida hacia el alambre largo, es decir, en la dirección $-x$.

b) (2 puntos) Determine la fuerza magnética que actúa sobre el segmento DE de la espira debido únicamente a I_1 .

El campo magnético producido por la corriente I_1 en la posición del segmento DE es

$$B_{DE} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{DE}}.$$

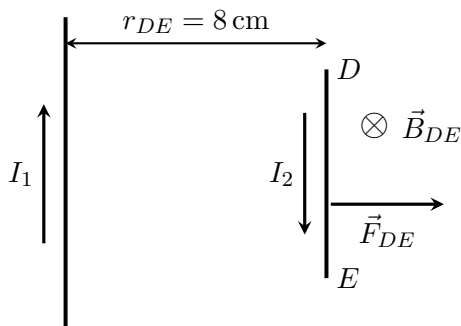
Sustituyendo los valores:

$$B_{DE} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(4,6)}{2\pi(0,08)},$$

$$\boxed{B_{DE} = 11,5 \times 10^{-6} \text{ T}}.$$

Aplicando la regla de la mano derecha, como el segmento DE se encuentra a la derecha del alambre y la corriente I_1 circula hacia arriba, el campo magnético ingresa al plano de la figura:

$$\vec{B}_{DE} = -(11,5 \times 10^{-6}) \hat{k} \text{ T}.$$



La corriente en el segmento DE circula desde D hacia E . Por ello, su vector longitud es

$$\vec{L}_{DE} = -(0,10)\hat{j} \text{ m}.$$

La fuerza magnética sobre el segmento se determina mediante

$$\vec{F}_{DE} = I_2 \vec{L}_{DE} \times \vec{B}_{DE}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_{DE} = (4,2)(-0,10\hat{j}) \times [-(11,5 \times 10^{-6})\hat{k}].$$

Como

$$(-\hat{j}) \times (-\hat{k}) = \hat{i},$$

se obtiene

$$\boxed{\vec{F}_{DE} = 4,83 \times 10^{-6} \hat{i} \text{ N}}.$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza magnética es

$$\boxed{F_{DE} = 4,83 \times 10^{-6} \text{ N}}$$

y está dirigida alejándose del alambre largo, es decir, en la dirección $+x$.

c) (1,5 puntos) Determina la fuerza magnética resultante sobre toda la espira. Justifique su respuesta.

Las fuerzas magnéticas sobre los segmentos verticales AB y DE tienen sentidos opuestos. De los ítems anteriores:

$$\vec{F}_{AB} = -12,89 \times 10^{-6} \hat{i} \text{ N},$$

$$\vec{F}_{DE} = 4,83 \times 10^{-6} \hat{i} \text{ N}.$$

Además, por simetría, las componentes verticales de las fuerzas magnéticas que actúan sobre los segmentos inclinados se cancelan entre sí. Por tanto, la fuerza magnética resultante es horizontal y su magnitud se obtiene mediante

$$F_R = F_{AB} - F_{DE}.$$

Sustituyendo:

$$F_R = 12,89 \times 10^{-6} - 4,83 \times 10^{-6},$$

$$F_R = 8,06 \times 10^{-6} \text{ N}.$$

Como la fuerza sobre AB es mayor que la fuerza sobre DE , la fuerza resultante está dirigida hacia el alambre largo, es decir, en la dirección $-x$. En forma vectorial:

$$\boxed{\vec{F}_R = -8,06 \times 10^{-6} \hat{i} \text{ N}}.$$

Problema 3 — (8,5 puntos)

a) (2,5 puntos) Una espira rectangular conductora de dimensiones $a \times b$ cae verticalmente desde el reposo bajo la acción de la gravedad en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$, el cual actúa únicamente dentro de la región circular mostrada en la figura. Si se elimina el campo magnético, pero se mantiene la acción de la gravedad, ¿la fuerza neta sobre la espira sería mayor, menor o igual que cuando la espira cae en presencia del campo magnético? Justifique su respuesta.

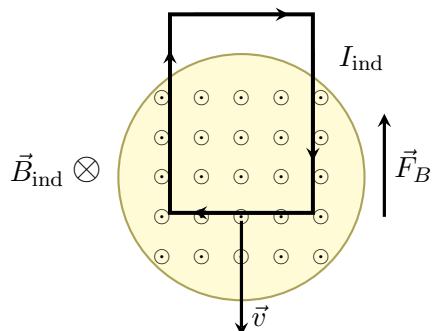
El campo magnético externo $\vec{B}$ está dirigido hacia fuera del plano de la figura, tal como indican los símbolos $\odot$. Mientras la espira cae, una porción cada vez mayor de su área ingresa en la región donde existe campo magnético. Por tanto, el flujo magnético saliente a través de la espira aumenta:

$$\Phi_B = BA_{\text{dentro}}, \quad \frac{d\Phi_B}{dt} > 0.$$

De acuerdo con la ley de Lenz, el campo magnético inducido debe oponerse al aumento del flujo saliente. Por ello, $\vec{B}_{\text{ind}}$ está dirigido hacia dentro del plano:

$$\vec{B}_{\text{ind}} : \otimes$$

Aplicando la regla de la mano derecha, para producir un campo magnético hacia dentro del plano, la corriente inducida debe circular en **sentido horario**.



En el segmento horizontal inferior, la corriente circula de derecha a izquierda. La fuerza magnética sobre dicho segmento está dada por

$$\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}.$$

Como

$$\vec{L} = -L\hat{i}, \quad \vec{B} = B\hat{k},$$

se tiene

$$\vec{F}_B = I(-L\hat{i}) \times (B\hat{k}) = ILB\hat{j}.$$

Por tanto, la fuerza magnética resultante está dirigida hacia arriba y se opone al movimiento de caída de la espira. Las fuerzas horizontales sobre los segmentos verticales se cancelan entre sí.

En presencia del campo magnético, la magnitud de la fuerza neta hacia abajo es

$$F_{\text{net}, \text{con } B} = mg - F_B.$$

Si se elimina el campo magnético, no existe fuerza magnética y la fuerza neta es únicamente el peso:

$$F_{\text{net}, \text{sin } B} = mg.$$

En consecuencia,

$$F_{\text{net}, \text{sin } B} = mg > F_{\text{net}, \text{con } B} = mg - F_B.$$

Por lo tanto, al eliminar el campo magnético, la fuerza neta sobre la espira es **mayor**.

b) (2 puntos) La figura muestra cuatro conductores rectos y largos que atraviesan perpendicularmente el plano de la figura, con corrientes $I_1 = 6\text{ A}$, $I_2 = 2\text{ A}$, $I_3 = 9\text{ A}$ e $I_4 = 1\text{ A}$, en los sentidos indicados. Para las trayectorias cerradas C_1 , C_2 y C_3 , determine el valor absoluto de la siguiente integral $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$.

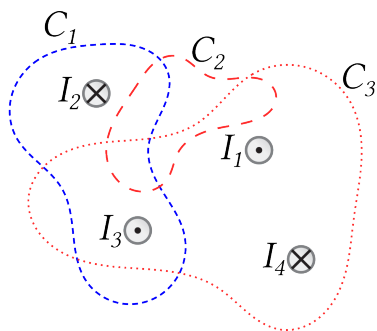
Aplicamos la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Como se solicita el valor absoluto,

$$\left| \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = \mu_0 |I_{\text{enc}}|.$$

Tomaremos como positivas las corrientes que salen del plano ($\odot$) y como negativas las que ingresan al plano ($\otimes$).



Para la trayectoria C_1 :

$$I_{\text{enc},1} = I_3 - I_2 = 9 - 2 = 7\text{ A}.$$

Entonces,

$$\left| \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = \mu_0(7),$$

$$\left| \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = 8,80 \times 10^{-6} \text{ T m}.$$

Para la trayectoria C_2 :

La trayectoria C_2 no encierra ninguna corriente, de modo que

$$I_{\text{enc},2} = 0.$$

Por tanto,

$$\left| \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = 0.$$

Para la trayectoria C_3 :

$$I_{\text{enc},3} = I_1 + I_3 - I_4 = 6 + 9 - 1 = 14\text{ A}.$$

Entonces,

$$\left| \oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = \mu_0(14),$$

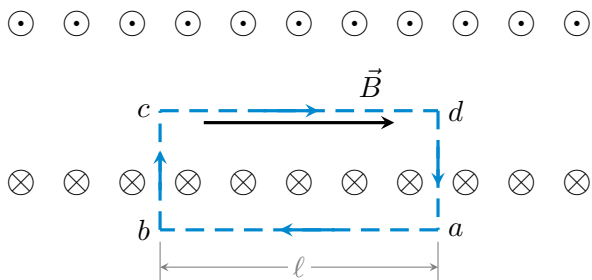
$$\left| \oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = 17,59 \times 10^{-6} \text{ T m}.$$

c) (2 puntos) En la figura se muestra un solenoide largo, de longitud L y con N espiras, que transporta una corriente I . Se considera la curva rectangular de Ampère $abcd$, recorrida en el sentido indicado, cuyo lado cd , de longitud ℓ , se encuentra en el interior del solenoide y es paralelo a su eje. Encuentre la expresión de la magnitud del campo magnético en el interior del solenoide.

Para determinar el campo magnético en el interior del solenoide, se aplica la ley de Ampère sobre la curva rectangular $abcd$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell}.$$



Para un solenoide largo, el campo magnético en el exterior es aproximadamente nulo. Por ello,

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

En los lados bc y da , el vector desplazamiento $d\vec{\ell}$ es perpendicular al campo magnético, de modo que

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \cos 90^\circ = 0.$$

Por tanto,

$$\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

El lado cd se encuentra en el interior del solenoide y es paralelo al campo magnético. Como B es uniforme en su interior,

$$\left| \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = B\ell.$$

Así, en magnitud,

$$\left| \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \right| = B\ell.$$

La cantidad de espiras encerradas por la curva de Ampère es

$$N_{\text{enc}} = n\ell = \frac{N}{L}\ell.$$

Como cada espira transporta una corriente I , la corriente encerrada es

$$I_{\text{enc}} = N_{\text{enc}}I = \frac{N}{L}\ell I.$$

Sustituyendo en la ley de Ampère:

$$B\ell = \mu_0 \left(\frac{N}{L}\ell I \right).$$

Cancelando ℓ en ambos lados, se obtiene

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I.$$

Equivalentemente, usando $n = N/L$,

$$B = \mu_0 n I.$$

d) (2 puntos) En la figura se muestra una mesa cuadrada de lado a , ubicada en el plano xy . En sus cuatro esquinas hay cables conductores rectilíneos muy largos, paralelos al eje z , que transportan corrientes de magnitud I , con los sentidos indicados. En el centro de la mesa se coloca una brújula cuyo polo norte inicialmente apunta en la dirección $+y$. Calcule el ángulo θ que se desvía la aguja respecto de la dirección norte.

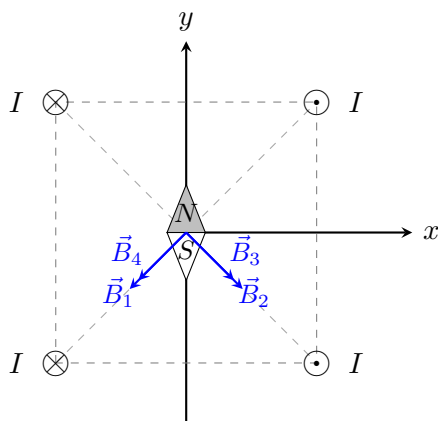
Sea O el centro de la mesa cuadrada. Como el lado de la mesa es a , la distancia desde cada cable hasta el centro es

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, la magnitud del campo magnético producido por *cada* cable en el centro es

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a/\sqrt{2})} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a}.$$

Aplicando la regla de la mano derecha, los campos magnéticos en el centro tienen las direcciones mostradas en la figura siguiente.



De la figura, se observa que las componentes horizontales se cancelan dos a dos, mientras que todas las componentes verticales apuntan hacia abajo. Entonces,

$$B_x = 0.$$

Cada campo aporta una componente vertical de magnitud

$$B_0 \cos 45^\circ = \frac{B_0}{\sqrt{2}}.$$

Como hay cuatro contribuciones iguales hacia $-y$,

$$B_y = -4 \left(\frac{B_0}{\sqrt{2}} \right).$$

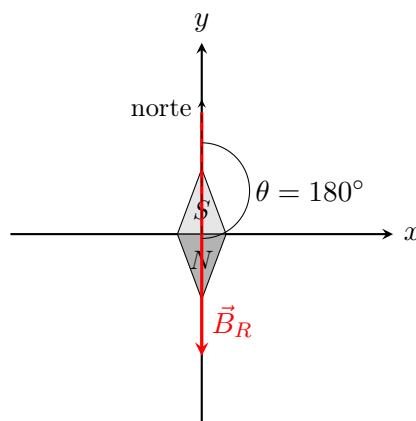
Sustituyendo $B_0 = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a}$,

$$B_y = -4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \right) = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a}.$$

Por tanto, el campo magnético resultante en el centro es

$$\vec{B}_R = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a} \hat{j}.$$

La brújula se orienta en la dirección del campo magnético resultante, por lo que su polo norte apuntará hacia $-y$. La posición final de la brújula se muestra en la siguiente figura.



Como inicialmente el polo norte de la brújula apuntaba en la dirección $+y$, el ángulo de desviación respecto del norte es

$$\theta = 180^\circ.$$