



Problema 1 — (9 puntos) La figura muestra un conductor extenso por el que circula una corriente de magnitud $I = 12 \text{ A}$. El tramo AB se encuentra en el eje y ; el tramo BC se encuentra en el plano xy ; el arco CD está situado en el plano xz y tiene su centro en el origen de coordenadas; el segmento DE pertenece al plano xz y es paralelo al eje x , mientras que el tramo EF , también ubicado en el plano xz , es paralelo al eje y .

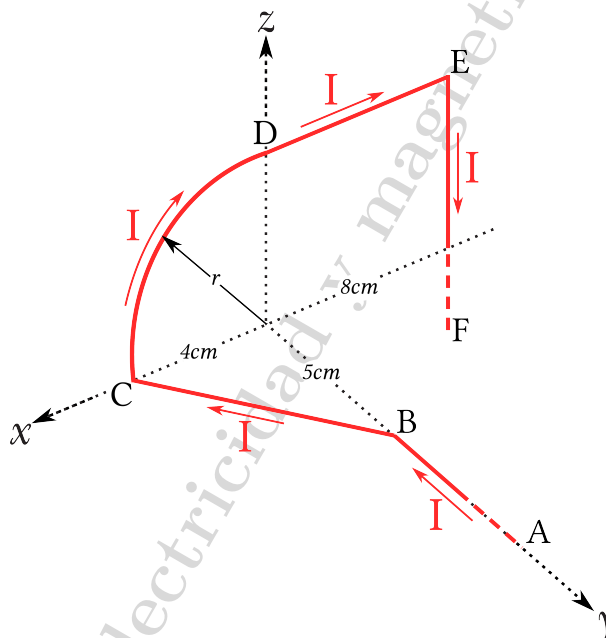
a) (1 punto) Determine el campo magnético en el origen de coordenadas debido únicamente al tramo AB .

Como el tramo AB se encuentra sobre el eje y , el origen O está sobre la línea de acción del conductor. Por ello, para cada elemento de corriente se cumple que $d\vec{\ell}$ es paralelo a $\vec{r}$, entonces:

$$d\vec{B} \propto d\vec{\ell} \times \vec{r} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\vec{B}_{AB} = 0$$



b) (2,5 puntos) Determine el campo magnético en el origen de coordenadas debido únicamente al tramo BC .

El tramo BC se encuentra en el plano xy . La distancia perpendicular desde el origen al conductor es

$$r = \frac{(4)(5)}{\sqrt{4^2 + 5^2}} \text{ cm} = \frac{20}{\sqrt{41}} \text{ cm} = 0,0312 \text{ m}.$$

Además,

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{4}{\sqrt{41}} + \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{41}}.$$

Usando

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha + \sin \beta),$$

se obtiene

$$B_{BC} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (12)}{4\pi (0,0312)} \left(\frac{9}{\sqrt{41}} \right).$$

$$B_{BC} = 5,4 \times 10^{-5} \text{ T}.$$

Por la regla de la mano derecha, el campo apunta en la dirección $-\hat{k}$. Entonces,

$$\vec{B}_{BC} = -5,4 \times 10^{-5} \hat{k} \text{ T}$$

c) (1,5 puntos) Determine el campo magnético en el origen de coordenadas debido únicamente al sector circular CD .

El arco tiene radio

$$R = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$$

y corresponde a un cuarto de circunferencia, por lo tanto

$$\theta = 90^\circ.$$

Usando

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{\theta}{360^\circ} \right),$$

se tiene

$$B_{CD} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (12)}{2(0,04)} \left(\frac{90^\circ}{360^\circ} \right).$$

$$B_{CD} = 4,71 \times 10^{-5} \text{ T}.$$

Por la regla de la mano derecha, el campo apunta en la dirección $-\hat{j}$. Entonces,

$$\vec{B}_{CD} = -4,71 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ T}$$

d) (2 puntos) Determine el campo magnético en el origen de coordenadas debido únicamente al tramo DE .

El tramo DE es recto y está a una distancia perpendicular

$$r = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$$

del origen. Además,

$$\sin \alpha = 0, \quad \sin \beta = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Entonces,

$$B_{DE} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha + \sin \beta).$$

$$B_{DE} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(12)}{4\pi(0,04)} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

$$B_{DE} = 2,68 \times 10^{-5} \text{ T}.$$

Por la regla de la mano derecha, el campo apunta en la dirección $-\hat{j}$. Por lo tanto,

$$\vec{B}_{DE} = -2,68 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ T}$$

e) (2 puntos) Determine el campo magnético en el origen de coordenadas debido únicamente al tramo EF .

Considerando que el tramo EF continúa hacia abajo como un tramo semi-infinito, la distancia perpendicular al origen es

$$r = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}.$$

Para el extremo superior E :

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{8^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Para el extremo inferior semi-infinito:

$$\sin \beta = 1.$$

Entonces,

$$B_{EF} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha + \sin \beta).$$

$$B_{EF} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(12)}{4\pi(0,08)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

$$B_{EF} = 2,17 \times 10^{-5} \text{ T}.$$

Por la regla de la mano derecha, el campo apunta en la dirección $-\hat{j}$. Por lo tanto,

$$\vec{B}_{EF} = -2,17 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ T}$$

Problema 2 — (8,5 puntos) En la figura se muestra un motor eléctrico formado por una espira rectangular de resistencia interna 24Ω , conectada a una fuente de voltaje de 120 V . Las dimensiones de la espira son $L_{AB} = 12 \text{ cm}$ y $L_{BC} = 18 \text{ cm}$. El sistema se encuentra dentro de un campo magnético uniforme de magnitud $0,33 \text{ T}$, generado por el imán que rodea a la espira.

Nota: A la derecha se presenta una vista de la espira observada desde el eje $+z$, donde se indica su orientación angular.

a) (2 puntos) Determine la fuerza magnética que actúa sobre el segmento AB .

La corriente que circula por la espira es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{24} = 5 \text{ A}.$$

En el tramo AB , la corriente sale del plano xy , es decir, va en dirección $+\hat{k}$. Por tanto,

$$\vec{L}_{AB} = 0,12 \hat{k} \text{ m}.$$

Además, el campo magnético uniforme va en dirección $+\hat{i}$:

$$\vec{B} = 0,33 \hat{i} \text{ T}.$$

Usamos:

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}.$$

Entonces:

$$\vec{F}_{AB} = 5 (0,12 \hat{k}) \times (0,33 \hat{i}).$$

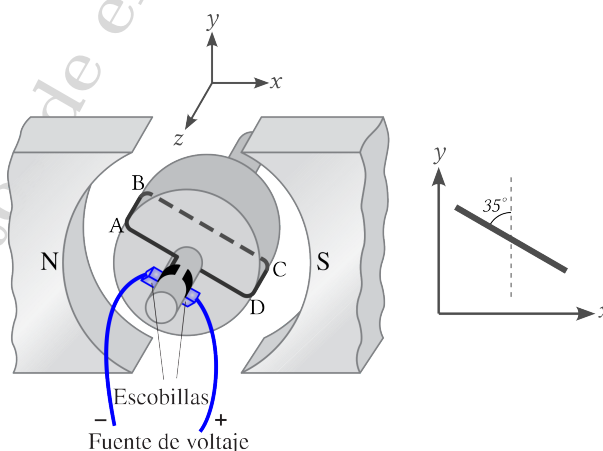
Como

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j},$$

se obtiene:

$$\vec{F}_{AB} = (5)(0,12)(0,33) \hat{j}.$$

$$\vec{F}_{AB} = 0,198 \hat{j} \text{ N}$$



b) (2,5 puntos) Determine la fuerza magnética que actúa sobre el segmento BC .

El tramo BC se encuentra en el plano xy . De la figura, este segmento forma un ángulo de 35° con el eje y .

Como la corriente circula desde C hacia B , el vector longitud del tramo BC puede escribirse como

$$\vec{L}_{BC} = L_{BC} (-\sin 35^\circ \hat{i} + \cos 35^\circ \hat{j}).$$

Además,

$$L_{BC} = 18 \text{ cm} = 0,18 \text{ m}$$

y

$$\vec{B} = 0,33 \hat{i} \text{ T}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_{BC} = I \vec{L}_{BC} \times \vec{B}.$$

$$\vec{F}_{BC} = 5(0,18) (-\sin 35^\circ \hat{i} + \cos 35^\circ \hat{j}) \times (0,33 \hat{i}).$$

Como $\hat{i} \times \hat{i} = 0$ y $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, se obtiene

$$\vec{F}_{BC} = -(5)(0,18)(0,33) \cos 35^\circ \hat{k}.$$

$$\boxed{\vec{F}_{BC} = -0,243 \hat{k} \text{ N}}$$

c) (1,5 puntos) Explique cuál es la función de las escobillas y del conmutador en el funcionamiento del motor. Justifique su respuesta.

Las **escobillas** permiten el contacto eléctrico entre la fuente de voltaje y la parte móvil del motor. Gracias a ellas, la corriente puede entrar a la espira mientras esta gira.

El **conmutador** invierte el sentido de la corriente en la espira cada media vuelta. Esto permite que el torque magnético mantenga el mismo sentido de giro. Si no existiera el conmutador, después de media vuelta el torque cambiaría de sentido y la espira tendería a detenerse o a oscilar.

d) (2,5 puntos) Determine momento magnético sobre la espira en ese instante. Explique cuál es el sentido de giro de la espira. Justifique su respuesta.

El área de la espira es

$$A = L_{AB} L_{BC}$$

$$A = (0,12)(0,18)$$

$$A = 0,0216 \text{ m}^2.$$

La corriente que circula por la espira es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{24} = 5 \text{ A}.$$

De la figura, el vector normal al área puede escribirse como

$$\hat{n}_A = \cos 35^\circ \hat{i} + \sin 35^\circ \hat{j}.$$

El momento magnético de una espira se define como

$$\vec{\mu} = IA \hat{n}_A.$$

Entonces,

$$\vec{\mu} = (5)(0,0216) (\cos 35^\circ \hat{i} + \sin 35^\circ \hat{j}).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{\mu} = (8,85 \times 10^{-2} \hat{i} + 6,19 \times 10^{-2} \hat{j}) \text{ A m}^2}$$

Para determinar el sentido de giro, analizamos la dirección del torque magnético:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Como

$$\vec{B} = 0,33 \hat{i} \text{ T},$$

se tiene que

$$\vec{\tau} \propto (\cos 35^\circ \hat{i} + \sin 35^\circ \hat{j}) \times \hat{i}.$$

$$\vec{\tau} \propto \cos 35^\circ (\hat{i} \times \hat{i}) + \sin 35^\circ (\hat{j} \times \hat{i}).$$

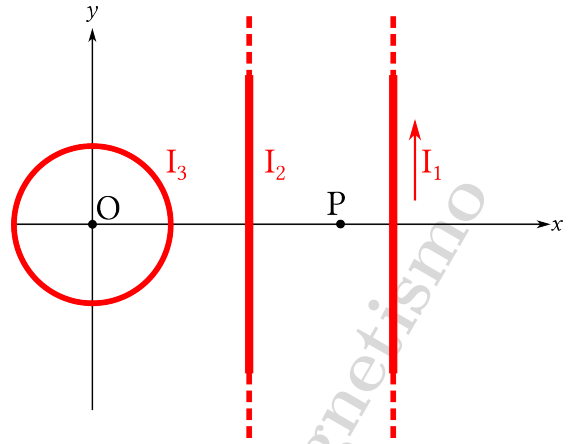
Como $\hat{i} \times \hat{i} = 0$ y $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, entonces

$$\vec{\tau} \text{ apunta en la dirección } -\hat{k}.$$

Por lo tanto, la espira gira en sentido horario cuando se observa desde el eje $+z$.

Problema 3 — (3 puntos) En la figura se muestran dos alambres rectilíneos muy largos, perpendiculares al eje x y paralelos al eje y , que transportan corrientes I_1 e I_2 . Además, en el origen de coordenadas O se encuentra una espira circular de radio R , contenida en el plano xy , que transporta una corriente I_3 .

El alambre que transporta la corriente I_1 cruza al eje x en $x = 10$ cm y conduce corriente en la dirección positiva del eje y . El alambre que transporta la corriente I_2 cruza al eje x en $x = 5$ cm.



Nota: A la derecha se presenta una vista de la espira observada desde el eje $+z$.

a) (1,5 puntos) Determine el sentido de las corrientes I_2 e I_3 para que el campo magnético resultante en el origen de coordenadas O tenga magnitud máxima. Justifique su respuesta.

El alambre que transporta la corriente I_1 se encuentra en $x = 10$ cm y la corriente va en la dirección $+\hat{j}$. Como el origen O está a la izquierda de este alambre, por la regla de la mano derecha, el campo magnético debido a I_1 apunta en la dirección $+\hat{k}$, es decir, sale del plano xy .

Para que el campo magnético resultante en O tenga magnitud máxima, los campos producidos por I_1 , I_2 e I_3 deben apuntar en la misma dirección.

Entonces, el campo producido por I_2 también debe apuntar en $+\hat{k}$. Como el origen está a la izquierda del alambre I_2 , esto se consigue si la corriente I_2 va en la dirección positiva del eje y :

I_2 debe ir en la dirección $+\hat{j}$

Para la espira circular ubicada en el origen, el campo magnético en su centro apunta en $+\hat{k}$ si la corriente se observa en sentido antihorario desde el eje $+z$.

I_3 debe circular en sentido antihorario visto desde $+z$

De esta manera,

$\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ apuntan en la dirección $+\hat{k}$,

por lo que la magnitud del campo magnético resultante en O es máxima.

b) (1,5 puntos) Considere únicamente los campos magnéticos producidos por los alambres que transportan las corrientes I_1 e I_2 . Si el campo magnético resultante en el punto $P = (8; 0)$ cm es nulo, determine la magnitud y el sentido de la corriente I_2 en función de I_1 .

El punto P se encuentra en $x = 8$ cm. Por lo tanto, sus distancias a los alambres son:

$$r_1 = 10 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

$$r_2 = 8 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

El campo magnético producido por un alambre rectilíneo muy largo es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En el punto P , el campo producido por I_1 apunta en la dirección $+\hat{k}$, mientras que el campo producido por I_2 , si I_2 va en $+\hat{j}$, apunta en la dirección $-\hat{k}$. Para que el campo resultante sea nulo, sus magnitudes deben ser iguales:

$$B_1 = B_2.$$

Entonces,

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

Por tanto,

$$I_2 = I_1 \frac{r_2}{r_1}.$$

Reemplazando $r_1 = 2$ cm y $r_2 = 3$ cm:

$$I_2 = I_1 \frac{3}{2}.$$

$$I_2 = \frac{3}{2} I_1$$

Además, para que el campo magnético en P sea nulo, I_2 debe circular en la dirección $+\hat{j}$.