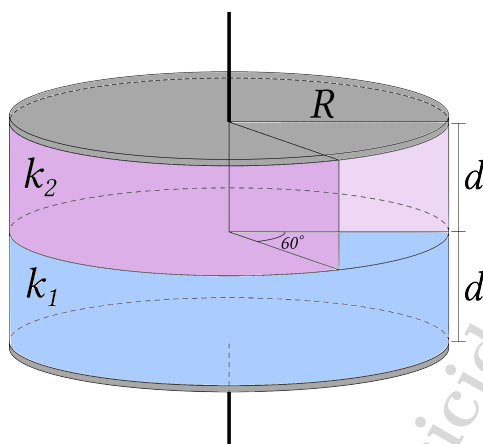


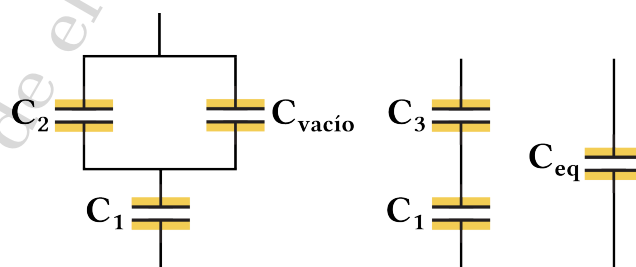


Problema 1 (9,5 puntos) — La figura muestra un capacitor de placas circulares paralelas, conectado a una fuente de diferencia de potencial de 150 V. Las placas tienen radio $R = 0,04$ mm. El espacio entre las placas está dividido en dos regiones de igual espesor $d = 0,03$ mm. La región inferior está completamente llena con un dieléctrico de constante relativa $k_1 = 1,5$, mientras que la región superior contiene un dieléctrico de constante relativa $k_2 = 2,1$. Sin embargo, este dieléctrico superior no ocupa todo el volumen: existe un sector angular de 60° que permanece vacío, tal como se muestra en la figura. **Nota:** Desprecie los efectos de borde.



a) (5 puntos) Determine la capacitancia equivalente del sistema.

Para modelar el sistema, consideramos que la región inferior, ocupada completamente por el dieléctrico k_1 , se comporta como una capacitancia C_1 . En la región superior, el dieléctrico k_2 ocupa un sector de 300° , mientras que el espacio vacío ocupa un sector de 60° . Por ello, C_2 y $C_{\text{vacío}}$ están en paralelo. Finalmente, esta combinación está en serie con C_1 .



Primero, calculamos la capacitancia asociada al dieléctrico k_1 . Como esta región ocupa toda el área circular de la placa, usamos

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 k_1 A}{d}, \quad A = \pi R^2.$$

Entonces,

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 k_1 \pi R^2}{d}.$$

Reemplazando los valores:

$$C_1 = \frac{(8,85 \times 10^{-12})(1,5)\pi(4,0 \times 10^{-5})^2}{3,0 \times 10^{-5}}.$$

$$C_1 = 22,2 \times 10^{-16} \text{ F}$$

Luego, calculamos la capacitancia asociada al dieléctrico k_2 . Como este dieléctrico ocupa un sector de 300° , su área es

$$A_{k_2} = \left(\frac{300^\circ}{360^\circ}\right) \pi R^2.$$

Por tanto,

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 k_2 A_{k_2}}{d}.$$

Sustituyendo el área del sector:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 k_2}{d} \left(\frac{300^\circ}{360^\circ} \right) \pi R^2.$$

Reemplazando los valores:

$$C_2 = \frac{(8,85 \times 10^{-12})(2,1)}{3,0 \times 10^{-5}} \left(\frac{300^\circ}{360^\circ} \right) \pi (4,0 \times 10^{-5})^2.$$

$$C_2 = 25,9 \times 10^{-16} \text{ F}$$

Ahora calculamos la capacitancia correspondiente al sector vacío. Como este sector ocupa un ángulo de 60° , su área es

$$A_{\text{vacío}} = \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \right) \pi R^2.$$

Como en esta región no hay dieléctrico, usamos $k = 1$. Entonces,

$$C_{\text{vacío}} = \frac{\varepsilon_0 A_{\text{vacío}}}{d}.$$

Sustituyendo el área del sector:

$$C_{\text{vacío}} = \frac{\varepsilon_0}{d} \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \right) \pi R^2.$$

Reemplazando los valores:

$$C_{\text{vacío}} = \frac{8,85 \times 10^{-12}}{3,0 \times 10^{-5}} \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \right) \pi (4,0 \times 10^{-5})^2.$$

$$C_{\text{vacío}} = 2,47 \times 10^{-16} \text{ F}$$

Como C_2 y $C_{\text{vacío}}$ están en paralelo, la capacitancia equivalente de la región superior es

$$C_3 = C_2 + C_{\text{vacío}}.$$

$$C_3 = 25,9 \times 10^{-16} + 2,47 \times 10^{-16}.$$

$$C_3 = 28,4 \times 10^{-16} \text{ F}$$

Finalmente, C_3 está en serie con C_1 , por lo tanto

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}.$$

También se puede escribir como

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}.$$

Reemplazando:

$$C_{\text{eq}} = \frac{(22,2 \times 10^{-16})(28,4 \times 10^{-16})}{22,2 \times 10^{-16} + 28,4 \times 10^{-16}}.$$

$$C_{\text{eq}} = 12,5 \times 10^{-16} \text{ F}$$

b) (2,5 puntos) Determine la magnitud del campo eléctrico en la región vacía, que corresponde al sector de 60° . Como C_1 y C_3 están en serie, ambos almacenan la misma carga. Entonces,

$$Q = C_{\text{eq}}V.$$

$$Q = (12,5 \times 10^{-16})(150).$$

$$Q = 1,87 \times 10^{-13} \text{ C}.$$

La diferencia de potencial en la región superior, es decir, en C_3 , es

$$V_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

$$V_3 = \frac{1,87 \times 10^{-13}}{28,4 \times 10^{-16}}.$$

$$V_3 = 65,9 \text{ V}.$$

Como C_2 y $C_{\text{vacío}}$ están en paralelo, ambos tienen la misma diferencia de potencial V_3 . Por tanto, el campo eléctrico en la región vacía es

$$E_{\text{vacío}} = \frac{V_3}{d}.$$

$$E_{\text{vacío}} = \frac{65,9}{3,0 \times 10^{-5}}.$$

$$\boxed{E_{\text{vacío}} = 2,20 \times 10^6 \text{ N/C}}$$

c) (2 puntos) Si el sector de 60° , inicialmente vacío, se llena completamente con un material conductor (por ejemplo, cobre), determine cómo varía la carga almacenada en la región ocupada por el dieléctrico k_2 en comparación con el caso original.

En el caso original, la carga almacenada en la región ocupada por el dieléctrico k_2 es

$$Q_{k_2} = C_2 V_3.$$

$$Q_{k_2} = (25,9 \times 10^{-16})(65,9).$$

$$Q_{k_2} = 1,71 \times 10^{-13} \text{ C}.$$

Si el sector de 60° , inicialmente vacío, se llena completamente con un material conductor, ese sector se comporta como una conexión conductora entre sus extremos. Por ello, la diferencia de potencial en la región superior se anula:

$$V'_3 = 0.$$

Como C_2 está en paralelo con ese sector conductor, la diferencia de potencial sobre el dieléctrico k_2 también se anula. Entonces,

$$Q'_{k_2} = C_2 V'_3.$$

$$Q'_{k_2} = C_2(0) = 0.$$

Por tanto, la variación de carga es

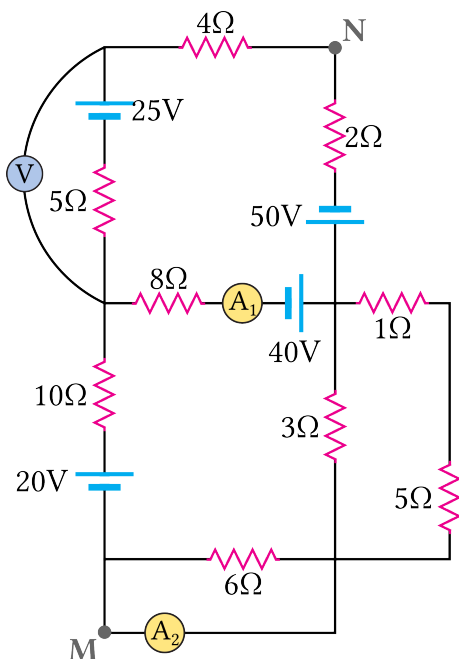
$$\Delta Q_{k_2} = Q'_{k_2} - Q_{k_2}.$$

$$\Delta Q_{k_2} = 0 - 1,71 \times 10^{-13}.$$

$$\boxed{\Delta Q_{k_2} = -1,71 \times 10^{-13} \text{ C}}$$

Problema 2 (10,5 puntos) — En el siguiente circuito se tienen cuatro fuentes ideales, nueve resistencias, un voltímetro ideal y dos amperímetros ideales.

a) (6 puntos) Determine la lectura del amperímetro A_1 .



Como el amperímetro A_2 es ideal, su resistencia interna es nula. Por ello, la resistencia de 6Ω queda en corto circuito y no influye en el análisis del circuito.

Además, como el amperímetro A_1 también es ideal, la rama donde se encuentra no introduce resistencia adicional. En la parte derecha del circuito, las resistencias de 1Ω y 5Ω están en serie:

$$R_s = 1\Omega + 5\Omega = 6\Omega$$

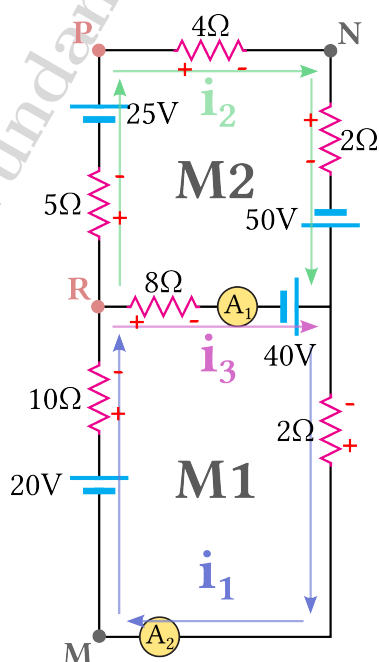
Esta resistencia equivalente está en paralelo con la resistencia de 3Ω . Entonces,

$$R_{eq} = \frac{(6)(3)}{6+3}$$

$$R_{eq} = 2\Omega$$

Por otro lado, el voltímetro ideal se retira del circuito, ya que tiene resistencia infinita. Sin embargo, se debe tener en cuenta que estaba conectado entre los puntos R y P .

El circuito reducido queda como se muestra a continuación:



Circuito reducido con las corrientes i_1 , i_2 , i_3 y las polaridades indicadas.

A partir del circuito reducido, planteamos las corrientes i_1 , i_2 e i_3 , según el sentido mostrado en la figura. En el nodo R , la corriente i_1 llega al nodo, mientras que las corrientes i_2 e i_3 salen de él.

Aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla izquierda M_1 . Recorriendo la malla en el sentido de i_1 , se tiene:

$$+20 - 10i_1 - 8i_3 + 40 - 2i_1 = 0$$

Ordenando:

$$-12i_1 - 8i_3 + 60 = 0$$

$$12i_1 + 8i_3 = 60$$

$$\boxed{12i_1 + 8i_3 = 60}$$

Ahora aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla derecha M_2 . Recorriendo la malla en el sentido de i_2 , se tiene:

$$-5i_2 + 25 - 4i_2 + 50 - 2i_2 - 40 + 8i_3 = 0$$

Ordenando:

$$-11i_2 + 8i_3 + 35 = 0$$

$$11i_2 - 8i_3 = 35$$

$$\boxed{11i_2 - 8i_3 = 35}$$

Finalmente, aplicamos la ley de nodos en el nodo R :

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\boxed{i_1 - i_2 - i_3 = 0}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} 12i_1 + 8i_3 = 60 \\ 11i_2 - 8i_3 = 35 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Ordenando en forma matricial:

$$\begin{cases} 12i_1 + 0i_2 + 8i_3 = 60 \\ 0i_1 + 11i_2 - 8i_3 = 35 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$i_1 = 4,49 \text{ A}$$

$$i_2 = 3,73 \text{ A}$$

$$i_3 = 0,759 \text{ A}$$

Como el amperímetro A_1 se encuentra en la rama central, su lectura corresponde a la corriente i_3 . Por tanto,

$$\boxed{A_1 = 0,759 \text{ A}}$$

b) (1 punto) Determine la lectura del voltímetro.

El voltímetro estaba conectado entre los puntos R y P . Por ello, su lectura corresponde a la diferencia de potencial entre dichos puntos.

En la rama superior izquierda, desde R hacia P , se tiene una resistencia de $5\ \Omega$ y una fuente de 25 V . Entonces:

$$V_P = V_R - 5i_2 + 25$$

Por lo tanto,

$$V_R - V_P = 5i_2 - 25$$

Sustituyendo $i_2 = 3,73\text{ A}$:

$$V_R - V_P = 5(3,73) - 25$$

$$V_R - V_P = -6,33\text{ V}$$

Esto significa que el punto P está a mayor potencial que el punto R . Como la lectura del voltímetro se toma en magnitud:

$$V = 6,33\text{ V}$$

c) (1,5 puntos) Determine la diferencia de potencial entre M y N , ($V_M - V_N$).

Para determinar $V_M - V_N$, realizamos un recorrido desde M hasta N usando la rama derecha del circuito reducido. Al recorrer desde M hacia N , se pasa por:

- la resistencia equivalente de $2\ \Omega$, por donde circula la corriente i_1 ,
- la resistencia de $2\ \Omega$, por donde circula la corriente i_2 ,
- la fuente de 50 V .

De acuerdo con las polaridades indicadas en el circuito reducido, se plantea:

$$V_M + 2i_1 + 2i_2 - 50 = V_N$$

Entonces,

$$V_M - V_N = 50 - 2i_1 - 2i_2$$

Reemplazando los valores de las corrientes:

$$i_1 = 4,49\text{ A}, \quad i_2 = 3,73\text{ A}$$

$$V_M - V_N = 50 - 2(4,49) - 2(3,73)$$

$$V_M - V_N = 50 - 8,98 - 7,46$$

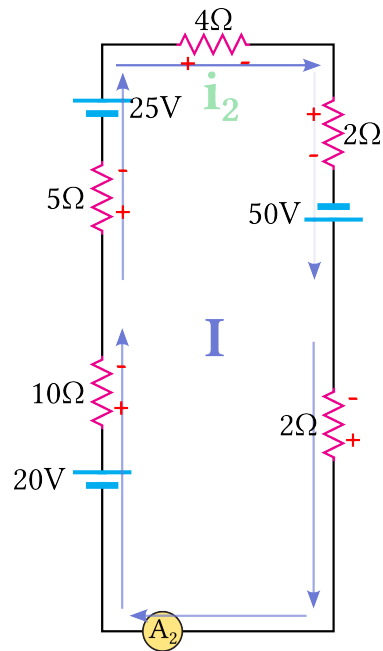
$$V_M - V_N = 33,6\text{ V}$$

Por lo tanto,

$$V_M - V_N = 33,6\text{ V}$$

d) (2 puntos) Si posteriormente se reemplaza el amperímetro A_1 por un voltímetro ideal, determine la lectura del amperímetro A_2 .

Si el amperímetro A_1 se reemplaza por un voltímetro ideal, la rama central queda abierta, ya que el voltímetro ideal tiene resistencia infinita. Por tanto, no circula corriente por dicha rama.



En ese caso, queda una sola malla exterior. Sea I la corriente que circula por esa malla. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$+20 - 10I + 25 - 5I - 4I + 50 - 2I - 2I = 0$$

Ordenando:

$$95 - 23I = 0$$

$$23I = 95$$

$$I = \frac{95}{23}$$

$$I = 4,13 \text{ A}$$

Como esta corriente pasa por el amperímetro A_2 , su lectura es

$$A_2 = 4,13 \text{ A}$$