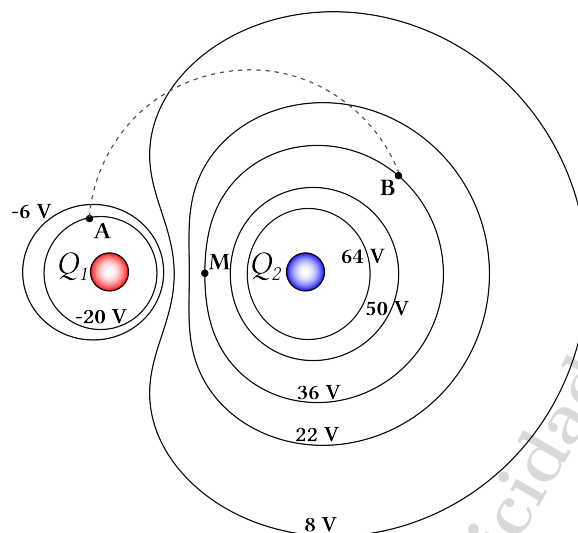




Problema 1 (5 puntos) — En la figura se muestran las superficies equipotenciales generadas por un sistema formado por dos esferas idénticas cargadas muy pequeñas, Q_1 y Q_2 . Se sabe que las cargas son $Q_1 = -1,80 \text{ nC}$ y $Q_2 = +3,00 \text{ nC}$. Además, el punto M corresponde al punto medio entre ambas cargas.



a) (2 puntos) Determine la distancia de separación entre las cargas, sabiendo que M es el punto medio. Como el punto M es el punto medio entre Q_1 y Q_2 , la distancia desde M hacia cada carga es la misma. Sea r dicha distancia, entonces la separación total entre las cargas será:

$$d = 2r$$

El potencial eléctrico en M debido a ambas cargas es:

$$V_M = k \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{r} \right)$$

Factorizando $\frac{1}{r}$:

$$V_M = k \frac{Q_1 + Q_2}{r}$$

Sustituyendo los datos:

$$36 = 9 \times 10^9 \frac{(-1,80 + 3,00) \times 10^{-9}}{r}$$

$$36 = 9 \times 10^9 \frac{1,20 \times 10^{-9}}{r}$$

$$36 = \frac{10,8}{r}$$

Despejando r :

$$r = \frac{10,8}{36} = 0,30 \text{ m}$$

Como la distancia de separación entre las cargas es $d = 2r$, se tiene:

$$d = 2(0,30) = 0,60 \text{ m}$$

$$\boxed{d = 0,60 \text{ m}}$$

b) (3 puntos) Una carga de prueba q_3 se desplaza inicialmente desde el punto A con una rapidez de 80 m/s hasta llegar al punto B con una rapidez de 20 m/s. Si su masa es 2×10^{-3} kg, determine la carga de q_3 . Aplicamos conservación de la energía mecánica:

$$E_k^A + U_A = E_k^B + U_B$$

donde E_k representa la energía cinética y $U = qV$ la energía potencial eléctrica. Entonces:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + q_3V_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + q_3V_B$$

Reemplazando los valores:

$$\frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(80)^2 + q_3(-20) = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(20)^2 + q_3(36)$$

$$(1 \times 10^{-3})(6400) - 20q_3 = (1 \times 10^{-3})(400) + 36q_3$$

$$6,4 - 20q_3 = 0,4 + 36q_3$$

$$6,0 = 56q_3$$

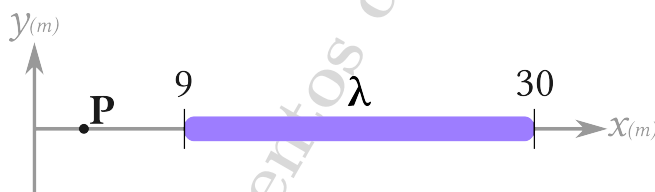
$$q_3 = \frac{6,0}{56}$$

$$q_3 = 0,107 \text{ C}$$

Por lo tanto, la carga de la partícula es:

$$q_3 = +0,107 \text{ C}$$

Problema 2 (3 puntos) — La figura muestra una barra delgada cargada uniformemente, ubicada a lo largo del eje x . La barra posee una carga total $Q = +12 \mu\text{C}$, distribuida uniformemente a lo largo de su longitud. Determine el vector campo eléctrico en el punto $P(3;0) \text{ m}$.



Como la carga está distribuida uniformemente, primero hallamos la densidad lineal de carga:

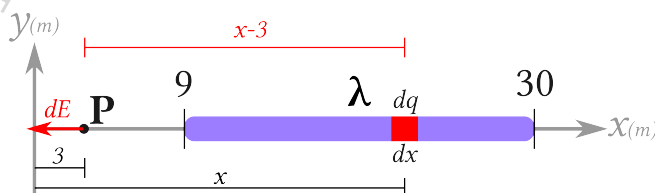
$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

donde

$$L = 30 - 9 = 21 \text{ m}$$

Entonces,

$$\lambda = \frac{12 \times 10^{-6}}{21} \text{ C/m}$$



Ahora consideremos un elemento diferencial de carga dq ubicado en una posición x de la barra. La magnitud del campo eléctrico diferencial que este elemento produce en P es:

$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

Como $dq = \lambda dx$ y la distancia entre el elemento ubicado en x y el punto $P(3;0)$ es

$$r = x - 3$$

se tiene:

$$dE = k \frac{\lambda dx}{(x - 3)^2}$$

Integrando a lo largo de toda la barra:

$$E = \int dE$$

$$E = k\lambda \int_9^{30} \frac{dx}{(x - 3)^2}$$

Resolviendo la integral:

$$E = k\lambda \left[-\frac{1}{x - 3} \right]_9^{30}$$

$$E = k\lambda \left(-\frac{1}{27} + \frac{1}{6} \right)$$

$$E = k\lambda \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{27} \right)$$

$$E = k\lambda \left(\frac{7}{54} \right)$$

Sustituyendo $k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ y $\lambda = \frac{12 \times 10^{-6}}{21} \text{ C/m}$:

$$E = (9 \times 10^9) \left(\frac{12 \times 10^{-6}}{21} \right) \left(\frac{7}{54} \right)$$

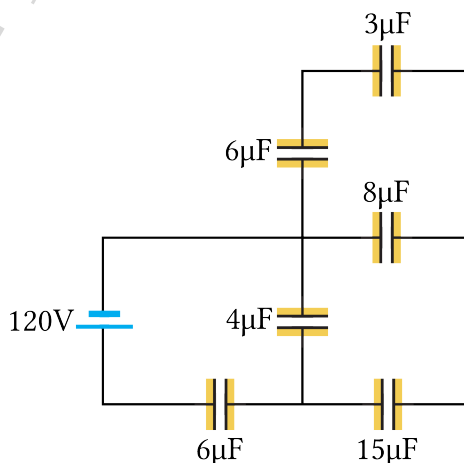
$$E = 666,67 \text{ N/C}$$

Como la barra tiene carga positiva, el campo eléctrico en P apunta alejándose de la barra. Dado que el punto P está a la izquierda de toda la distribución, la dirección del campo es hacia la izquierda, es decir, en la dirección $-\hat{i}$.

Por lo tanto, el vector campo eléctrico en P es:

$$\vec{E} = -666,67 \hat{i} \text{ N/C}$$

Problema 3 (12 puntos) — En el siguiente circuito, una fuente de 120 V se encuentra conectada a un arreglo de capacitores, tal como se muestra en la figura. Con base en la configuración del circuito, determine:



a) (7 puntos) La capacitancia equivalente del sistema.

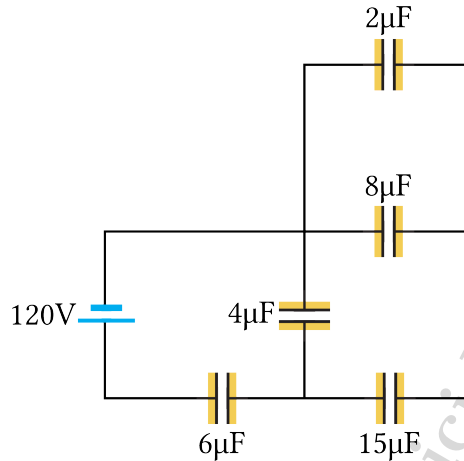
Nota: Se deberá dibujar cada reducción realizada en el circuito como parte del desarrollo. Si no se incluyen los dibujos, no se asignará puntaje.

Primero, los capacitores de $3\mu\text{F}$ y $6\mu\text{F}$ están en serie:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

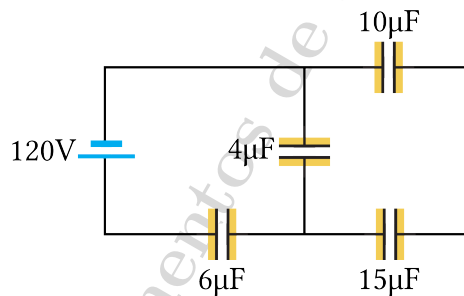
$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{2}$$

$$C_1 = 2\mu\text{F}$$



Luego, este resultado está en paralelo con el capacitor de $8\mu\text{F}$:

$$C_2 = 2 + 8 = 10\mu\text{F}$$

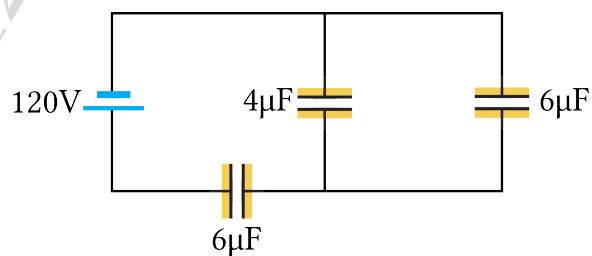


Ahora, $C_2 = 10\mu\text{F}$ está en serie con el capacitor de $15\mu\text{F}$. A este resultado lo llamamos C_3 :

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

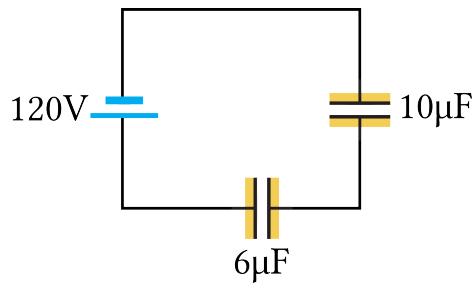
$$\frac{1}{C_3} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$C_3 = 6\mu\text{F}$$



Después, C_3 está en paralelo con el capacitor de $4\mu\text{F}$. A este nuevo resultado lo llamamos C_4 :

$$C_4 = 6 + 4 = 10\mu\text{F}$$

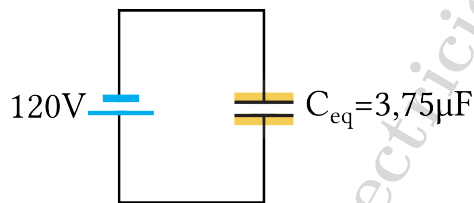


Finalmente, C_4 está en serie con el capacitor de $6\mu\text{F}$, obteniéndose la capacitancia equivalente del sistema:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{3+5}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$C_{eq} = \frac{15}{4} = 3,75\mu\text{F}$$



Por lo tanto, la capacitancia equivalente del sistema es:

$$C_{eq} = 3,75\mu\text{F}$$

b) (2,5 puntos) La carga almacenada en el capacitor de $4\mu\text{F}$.

A partir del ítem anterior, se tiene que la capacitancia equivalente del sistema es:

$$C_{eq} = 3,75\mu\text{F}$$

Además, la fuente conectada al circuito es de:

$$V = 120\text{ V}$$

Entonces, la carga total almacenada en el sistema es:

$$Q_{eq} = C_{eq}V$$

$$Q_{eq} = (3,75\mu\text{F})(120\text{ V})$$

$$Q_{eq} = 450\mu\text{C}$$

Como C_{eq} se obtuvo a partir de la asociación en serie entre el capacitor de $6\mu\text{F}$ y el bloque C_4 , ambos almacenan la misma carga:

$$Q_{C_4} = 450\mu\text{C}$$

Del ítem anterior también se obtuvo que:

$$C_4 = 10\mu\text{F}$$

Por tanto, el voltaje en el bloque C_4 es:

$$V_{C_4} = \frac{Q_{C_4}}{C_4}$$

$$V_{C_4} = \frac{450 \mu\text{C}}{10 \mu\text{F}}$$

$$V_{C_4} = 45 \text{ V}$$

Ahora, como el capacitor de $4 \mu\text{F}$ está en paralelo con C_3 , ambos tienen el mismo voltaje. Entonces:

$$V_{4\mu\text{F}} = 45 \text{ V}$$

Finalmente, la carga almacenada en el capacitor de $4 \mu\text{F}$ es:

$$Q_{4\mu\text{F}} = CV$$

$$Q_{4\mu\text{F}} = (4 \mu\text{F})(45 \text{ V})$$

$$Q_{4\mu\text{F}} = 180 \mu\text{C}$$

Por lo tanto, la carga almacenada en el capacitor de $4 \mu\text{F}$ es:

$$Q_{4\mu\text{F}} = 180 \mu\text{C}$$

c) (2,5 puntos) La energía almacenada en el capacitor de $15 \mu\text{F}$.
Del ítem anterior, se obtuvo que el bloque C_4 tiene un voltaje de:

$$V_{C_4} = 45 \text{ V}$$

Como C_3 está en paralelo con el capacitor de $4 \mu\text{F}$, ambos tienen el mismo voltaje. Entonces:

$$V_{C_3} = 45 \text{ V}$$

Además, del ítem a) se obtuvo que:

$$C_3 = 6 \mu\text{F}$$

Por lo tanto, la carga almacenada en el bloque C_3 es:

$$Q_{C_3} = C_3 V_{C_3}$$

$$Q_{C_3} = (6 \mu\text{F})(45 \text{ V})$$

$$Q_{C_3} = 270 \mu\text{C}$$

Ahora, recordemos que C_3 se formó con la asociación en serie de $C_2 = 10 \mu\text{F}$ y el capacitor de $15 \mu\text{F}$. En una conexión en serie, ambos capacitores almacenan la misma carga. Entonces:

$$Q_{15\mu\text{F}} = 270 \mu\text{C}$$

Con ello, el voltaje en el capacitor de $15 \mu\text{F}$ es:

$$V_{15\mu\text{F}} = \frac{Q_{15\mu\text{F}}}{C}$$

$$V_{15\mu\text{F}} = \frac{270 \mu\text{C}}{15 \mu\text{F}}$$

$$V_{15\mu\text{F}} = 18 \text{ V}$$

Finalmente, la energía almacenada en dicho capacitor es:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U = \frac{1}{2}(15 \times 10^{-6})(18)^2$$

$$U = 2,43 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Por lo tanto, la energía almacenada en el capacitor de $15 \mu\text{F}$ es:

$U = 2,43 \times 10^{-3} \text{ J}$

CC1122 - Fundamentos de electricidad y magnetismo