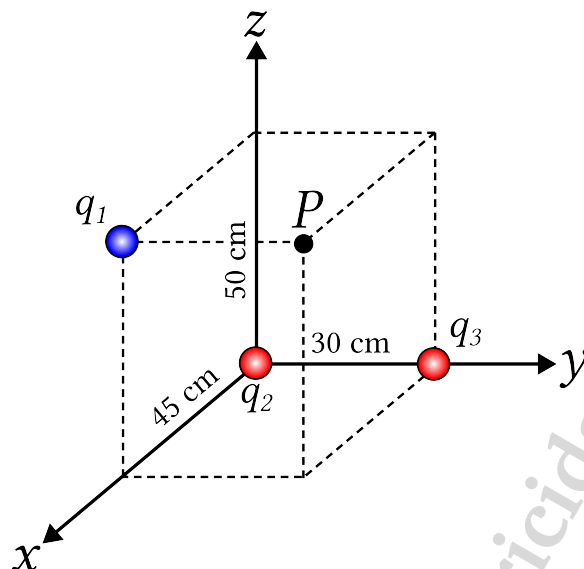
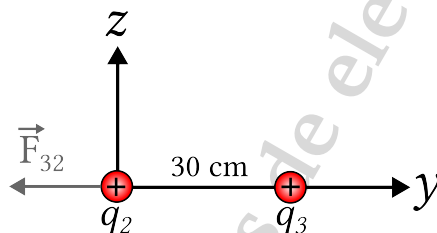




Problema 1 (14 puntos) — En la figura se muestran tres pequeñas esferas conductoras ubicadas tal como se muestra en la figura. Se sabe que $q_1 = -8 \mu\text{C}$, $q_2 = +12 \mu\text{C}$ y $q_3 = +8 \mu\text{C}$.



a) (1,5 puntos) Determine la fuerza eléctrica que ejerce q_3 sobre q_2 .



Para determinar la fuerza eléctrica que ejerce q_3 sobre q_2 , aplicamos la ley de Coulomb:

$$F_{32} = k \frac{|q_3 q_2|}{r^2}$$

donde:

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2, \quad q_3 = +8 \mu\text{C} = 8 \times 10^{-6} \text{ C}, \quad q_2 = +12 \mu\text{C} = 12 \times 10^{-6} \text{ C}$$

y la distancia entre las cargas es:

$$r = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$$

Sustituyendo en la expresión:

$$F_{32} = 9 \times 10^9 \frac{(8 \times 10^{-6})(12 \times 10^{-6})}{(0,30)^2}$$

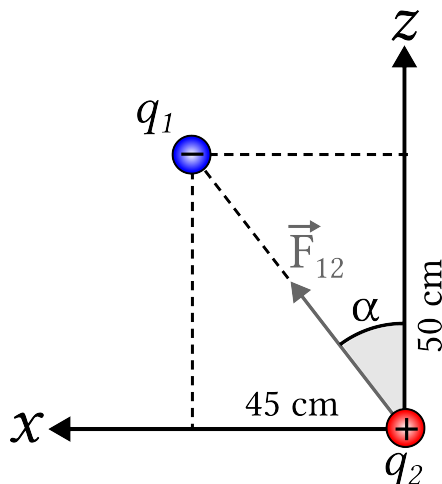
$$F_{32} = 9 \times 10^9 \frac{96 \times 10^{-12}}{0,09}$$

$$F_{32} = 9,6 \text{ N}$$

Como ambas cargas son positivas, la fuerza es de repulsión. Por lo tanto, la fuerza que ejerce q_3 sobre q_2 está dirigida en el sentido negativo del eje y .

$$\vec{F}_{32} = -9,6 \hat{j} \text{ N}$$

b) (2,5 puntos) Determine la fuerza eléctrica total que experimenta q_2 .



Para determinar la fuerza eléctrica total que experimenta q_2 , se debe realizar la suma vectorial de todas las fuerzas eléctricas que actúan sobre dicha carga. En este caso:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que ejerce q_1 sobre q_2 y $\vec{F}_{32}$ es la fuerza que ejerce q_3 sobre q_2 .
Del ítem anterior, ya se obtuvo:

$$\vec{F}_{32} = -9,6 \hat{j} \text{ N}$$

Ahora calculamos la fuerza que ejerce q_1 sobre q_2 .

Como q_1 es negativa y q_2 es positiva, la fuerza $\vec{F}_{12}$ es de atracción y está dirigida desde q_2 hacia q_1 , en el plano xz .

Primero, hallamos el ángulo α a partir de la geometría:

$$\tan \alpha = \frac{45}{50}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{45}{50} \right) \approx 41,99^\circ$$

La distancia entre q_1 y q_2 es:

$$r_{12} = \sqrt{(45 \text{ cm})^2 + (50 \text{ cm})^2}$$

Pasando a metros:

$$r_{12} = \sqrt{(0,45)^2 + (0,50)^2} \approx 0,673 \text{ m}$$

Aplicando la ley de Coulomb:

$$F_{12} = k \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2}$$

$$F_{12} = 9 \times 10^9 \frac{|(-8 \times 10^{-6})(12 \times 10^{-6})|}{(0,673)^2}$$

$$F_{12} \approx 1,91 \text{ N}$$

Como α está medido respecto del eje z , descomponemos la fuerza $\vec{F}_{12}$ en sus componentes cartesianas:

$$F_{12x} = F_{12} \sin \alpha \quad \text{y} \quad F_{12z} = F_{12} \cos \alpha$$

Entonces:

$$F_{12x} = 1,91 \sin(41,99^\circ) \approx 1,28 \text{ N}$$

$$F_{12z} = 1,91 \cos(41,99^\circ) \approx 1,42 \text{ N}$$

Por tanto, la fuerza $\vec{F}_{12}$ en forma vectorial es:

$$\vec{F}_{12} = 1,28 \hat{i} + 0 \hat{j} + 1,42 \hat{k} \text{ N}$$

Finalmente, la fuerza total sobre q_2 se obtiene sumando vectorialmente las fuerzas que ejercen q_1 y q_3 sobre ella:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = (1,28 \hat{i} + 0 \hat{j} + 1,42 \hat{k}) + (0 \hat{i} - 9,6 \hat{j} + 0 \hat{k})$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{total}} = 1,28 \hat{i} - 9,6 \hat{j} + 1,42 \hat{k} \text{ N}}$$

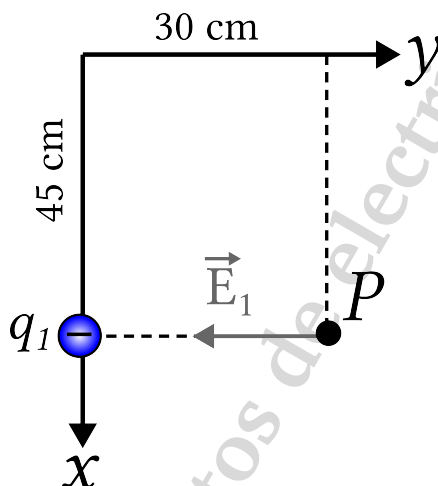
c) (7 puntos) Determine el campo eléctrico total en el punto P .

Para determinar el campo eléctrico total en el punto P , se suman vectorialmente los campos eléctricos generados por las cargas q_1 , q_2 y q_3 :

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

A continuación, se calcula el aporte de cada carga en el punto P .

Campo eléctrico debido a q_1



Para determinar el campo eléctrico en el punto P debido a q_1 , aplicamos la expresión del campo eléctrico producido por una carga puntual:

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r^2}$$

donde:

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2, \quad |q_1| = 8 \times 10^{-6} \text{ C}, \quad r = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$$

Sustituyendo:

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{8 \times 10^{-6}}{(0,30)^2}$$

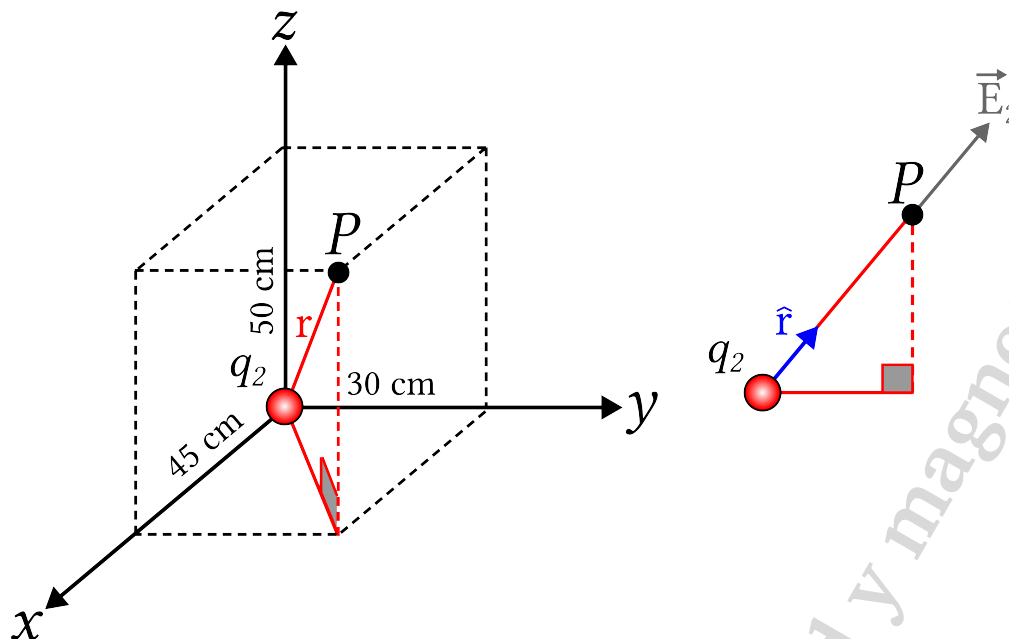
$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{8 \times 10^{-6}}{0,09}$$

$$E_1 = 8,0 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Como q_1 es una carga negativa, el campo eléctrico en P apunta hacia la carga. Según la figura, esa dirección corresponde al sentido negativo del eje y . Por tanto:

$$\vec{E}_1 = -8,0 \times 10^5 \hat{j} \text{ N/C}$$

Campo eléctrico debido a q_2



Ahora determinamos el campo eléctrico en el punto P debido a q_2 , utilizando la forma vectorial del campo eléctrico de una carga puntual:

$$\vec{E}_2 = k \frac{q_2}{r^2} \hat{r}$$

Tomando como origen la posición de q_2 , las coordenadas del punto P son:

$$P = (45, 30, 50) \text{ cm}$$

Por tanto, el vector posición es:

$$\vec{r} = (45 \hat{i} + 30 \hat{j} + 50 \hat{k}) \text{ cm}$$

Pasando a metros:

$$\vec{r} = (0, 45 \hat{i} + 0, 30 \hat{j} + 0, 50 \hat{k}) \text{ m}$$

La magnitud del vector posición es:

$$r = \sqrt{(0, 45)^2 + (0, 30)^2 + (0, 50)^2}$$

$$r \approx 0,7365 \text{ m}$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}$ es:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\hat{r} = \frac{0, 45 \hat{i} + 0, 30 \hat{j} + 0, 50 \hat{k}}{0, 7365}$$

$$\hat{r} = 0, 611 \hat{i} + 0, 407 \hat{j} + 0, 679 \hat{k}$$

Como $q_2 = +12 \mu\text{C} = 12 \times 10^{-6} \text{ C}$, el campo eléctrico queda:

$$\vec{E}_2 = 9 \times 10^9 \frac{12 \times 10^{-6}}{(0, 7365)^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_2 = 1, 991 \times 10^5 \hat{r} \text{ N/C}$$

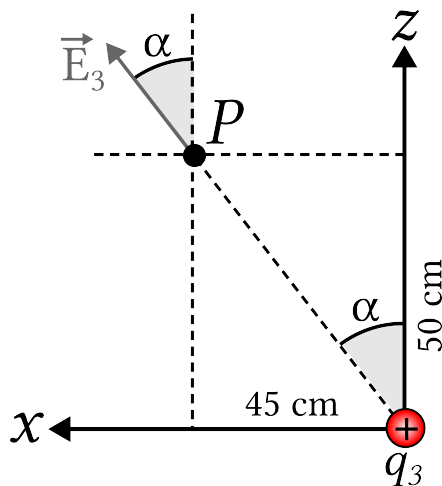
Sustituyendo el vector unitario:

$$\vec{E}_2 = 1,991 \times 10^5 \left(0,611 \hat{i} + 0,407 \hat{j} + 0,679 \hat{k} \right) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = 1,22 \times 10^5 \hat{i} + 8,10 \times 10^4 \hat{j} + 1,35 \times 10^5 \hat{k} \text{ N/C}$$

Como q_2 es positiva, el campo eléctrico en P apunta alejándose de la carga, es decir, en la misma dirección del vector $\hat{r}$.

Campo eléctrico debido a q_3



Finalmente, calculamos el campo eléctrico en P debido a q_3 .

Como $q_3 = +8 \mu\text{C}$, el campo en P apunta alejándose de la carga. Según la geometría del problema, $\vec{E}_3$ se encuentra en el plano xz .

La distancia entre q_3 y P es:

$$r = \sqrt{(45 \text{ cm})^2 + (50 \text{ cm})^2}$$

Pasando a metros:

$$r = \sqrt{(0,45)^2 + (0,50)^2} \approx 0,673 \text{ m}$$

Del triángulo rectángulo:

$$\tan \alpha = \frac{45}{50}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{45}{50} \right) \approx 41,99^\circ$$

La magnitud del campo eléctrico producido por q_3 es:

$$E_3 = k \frac{|q_3|}{r^2}$$

$$E_3 = 9 \times 10^9 \frac{8 \times 10^{-6}}{(0,673)^2}$$

$$E_3 = 1,59 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Descomponiendo en ejes cartesianos:

$$E_{3x} = E_3 \sin \alpha \quad \text{y} \quad E_{3z} = E_3 \cos \alpha$$

$$E_{3x} = 1,59 \times 10^5 \sin(41,99^\circ) = 1,06 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_{3z} = 1,59 \times 10^5 \cos(41,99^\circ) = 1,18 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Por tanto,

$$\vec{E}_3 = 1,06 \times 10^5 \hat{i} + 0 \hat{j} + 1,18 \times 10^5 \hat{k} \text{ N/C}$$

Campo eléctrico total en P

Una vez obtenidos los campos eléctricos producidos por cada carga, se realiza la suma vectorial:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E}_{\text{total}} = (0 \hat{i} - 8,0 \times 10^5 \hat{j} + 0 \hat{k}) + (1,22 \times 10^5 \hat{i} + 8,10 \times 10^4 \hat{j} + 1,35 \times 10^5 \hat{k}) + (1,06 \times 10^5 \hat{i} + 0 \hat{j} + 1,18 \times 10^5 \hat{k})$$

$$\vec{E}_{\text{total}} = 2,28 \times 10^5 \hat{i} - 7,19 \times 10^5 \hat{j} + 2,53 \times 10^5 \hat{k} \text{ N/C}$$

d) (1,5 puntos) Si q_1 y q_3 chocan entre sí y permanecen en contacto durante un instante, determine cuántos protones se transfieren de una esfera a la otra durante el contacto. Justifique su respuesta.

Al entrar en contacto dos esferas conductoras, las cargas pueden redistribuirse entre ellas. Sin embargo, en los conductores las partículas que se desplazan son los electrones, no los protones.

Los protones se encuentran en el núcleo de los átomos y no se transfieren de una esfera a otra durante este tipo de interacción. Por ello, aun cuando exista redistribución de carga eléctrica al momento del contacto, la cantidad de protones transferidos es nula.

En este caso, como inicialmente:

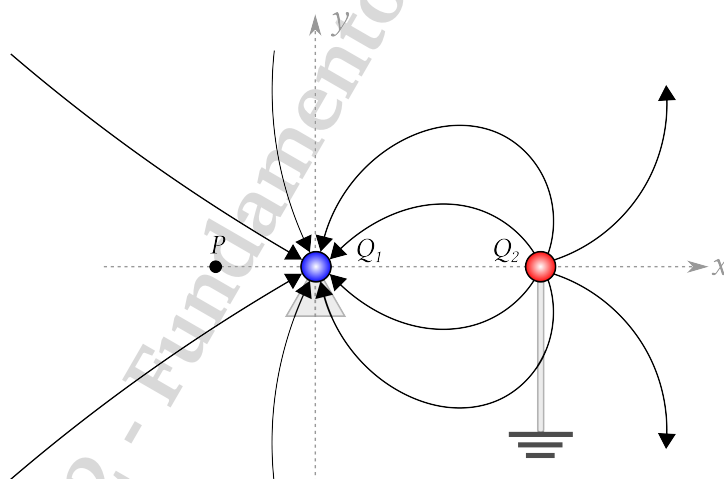
$$q_1 = -8 \mu\text{C} \quad \text{y} \quad q_3 = +8 \mu\text{C},$$

al ponerse en contacto ocurre transferencia de electrones desde la esfera con carga negativa hacia la esfera con carga positiva, hasta redistribuir la carga. No obstante, no hay transferencia de protones.

Por tanto,

$$N_{\text{protones}} = 0$$

Problema 2 (7,5 puntos) — En la figura se muestran dos cargas puntuales, Q_1 y Q_2 , junto con sus respectivas líneas de campo eléctrico. La carga Q_1 está fija por medio de un soporte aislante y la carga Q_2 está sostenida por una varilla aislante conectada a tierra. Se sabe que la magnitud de la carga Q_1 es 32 nC.



a) (2,5 puntos) Determine la magnitud y el signo de las cargas Q_1 y Q_2 .

Para determinar el signo y la magnitud de las cargas Q_1 y Q_2 , analizamos las líneas de campo eléctrico mostradas en la figura.

Recordemos que las líneas de campo eléctrico **salen** de las cargas positivas y **entran** en las cargas negativas. Además, el número de líneas es proporcional a la magnitud de la carga.

En la figura se observa que sobre Q_1 **entran 8 líneas de campo**, por lo tanto, Q_1 es una carga **negativa**. Como el problema indica que la magnitud de Q_1 es 32 nC, entonces:

$$Q_1 = -32 \text{ nC}$$

Por otro lado, de Q_2 salen **6 líneas de campo**, por lo tanto, Q_2 es una carga **positiva**. Como la magnitud de la carga es proporcional al número de líneas de campo, se cumple:

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{6}{8}$$

Sustituyendo $|Q_1| = 32 \text{ nC}$:

$$\frac{|Q_2|}{32} = \frac{6}{8}$$

$$|Q_2| = 32 \left(\frac{6}{8} \right) = 24 \text{ nC}$$

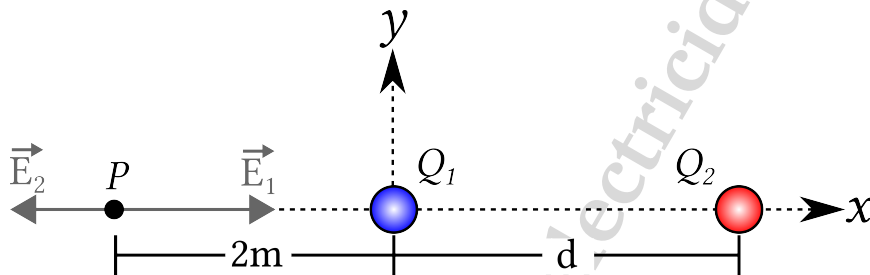
Como Q_2 es positiva, se concluye que:

$$Q_2 = +24 \text{ nC}$$

Por tanto, los valores de las cargas son:

$$\boxed{Q_1 = -32 \text{ nC}} \quad \text{y} \quad \boxed{Q_2 = +24 \text{ nC}}$$

b) (3 puntos) Si en el punto $P(-2; 0) \text{ m}$ la magnitud del campo eléctrico es 66 N/C , determine la distancia de separación entre Q_1 y Q_2 .



En el punto $P(-2; 0) \text{ m}$, el campo eléctrico total es la suma vectorial de los campos producidos por Q_1 y Q_2 . Del ítem anterior se tiene:

$$Q_1 = -32 \text{ nC} \quad \text{y} \quad Q_2 = +24 \text{ nC}$$

Como Q_1 es negativa, el campo eléctrico que produce en P apunta **hacia** la carga, es decir, en el sentido positivo del eje x .

Como Q_2 es positiva, el campo eléctrico que produce en P apunta **alejándose** de la carga, es decir, en el sentido negativo del eje x .

Por tanto, ambos campos tienen sentidos opuestos y la magnitud del campo total en P viene dada por:

$$E_P = E_1 - E_2$$

Sea d la distancia de separación entre Q_1 y Q_2 . Entonces, la distancia entre P y Q_1 es:

$$r_1 = 2 \text{ m}$$

y la distancia entre P y Q_2 es:

$$r_2 = d + 2$$

Aplicando la expresión del campo eléctrico de una carga puntual:

$$66 = k \frac{|Q_1|}{r_1^2} - k \frac{|Q_2|}{r_2^2}$$

Sustituyendo los datos:

$$66 = 9 \times 10^9 \frac{32 \times 10^{-9}}{2^2} - 9 \times 10^9 \frac{24 \times 10^{-9}}{(d+2)^2}$$

$$66 = \frac{288}{4} - \frac{216}{(d+2)^2}$$

$$66 = 72 - \frac{216}{(d+2)^2}$$

$$\frac{216}{(d+2)^2} = 6$$

$$(d+2)^2 = 36$$

$$d+2 = 6$$

$$d = 4 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia de separación entre Q_1 y Q_2 es:

$$\boxed{d = 4 \text{ m}}$$

c) (2 puntos) Si el soporte aislante de la carga Q_2 es sustituido por una varilla de cobre, manteniéndose Q_2 en la misma posición mostrada, determine la fuerza eléctrica que Q_1 ejerce sobre Q_2 . Justifique su respuesta.

Inicialmente, la carga Q_2 está sostenida por una varilla **aislante** conectada a tierra, por lo que no existe transferencia de carga entre Q_2 y la Tierra. Sin embargo, al sustituirla por una **varilla de cobre**, Q_2 queda efectivamente conectada a tierra y puede intercambiar carga con ella.

En esas condiciones, la carga Q_2 se neutraliza, por lo que su nueva carga será:

$$Q'_2 = 0$$

La fuerza eléctrica que Q_1 ejerce sobre Q_2 se determina mediante la ley de Coulomb:

$$F_{12} = k \frac{|Q_1 Q'_2|}{r^2}$$

Como $Q'_2 = 0$, se obtiene:

$$F_{12} = k \frac{|Q_1(0)|}{r^2} = 0$$

Por lo tanto, la fuerza eléctrica que Q_1 ejerce sobre Q_2 es nula:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \vec{0}}$$