

Nombres y apellidos: \_\_\_\_\_

2026-1

## Examen Final

## Indicaciones

- La duración del examen es de 100 minutos.
- El desarrollo del examen es estrictamente personal.
- Se permite el uso personal de calculadoras.
- No se permite el uso de celulares, relojes o cualquier otro dispositivo de comunicación.
- No se permite el uso de copias, apuntes, libros u hojas propias.
- De usar una fórmula que no se encuentre en el formulario, debe demostrarla.
- No se asignará puntaje a las respuestas o soluciones que carezcan de justificación o procedimiento.
- **La presentación, la ortografía y la gramática influirán en la calificación.**

## Fórmulas

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$m = 10^{-3}, \quad \mu = 10^{-6}$$

$$c = 10^{-2}, \quad n = 10^{-9}$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = BA \cos \theta$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$F = ILB \sin \theta$$

$$\vec{\tau} = NIA \hat{n} \times \vec{B}$$

$$\tau = NIAB \sin \varphi$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = |q|vB \sin \phi$$

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

$$n = \frac{N}{L}$$

$$B = \mu_0 nI$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$V = IR$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \pm \omega t$$

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{rms}} = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{\theta}{360^\circ} \right)$$

$$Z_R = R \angle 0^\circ$$

$$Z_L = \omega L \angle 90^\circ$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2 + \dots$$

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$$

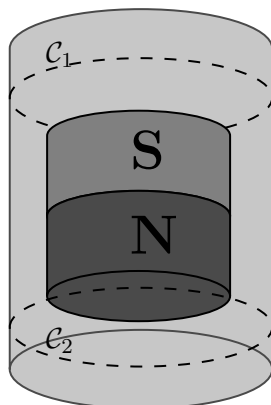
$$Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{|Z|}$$

$$v = \omega R$$

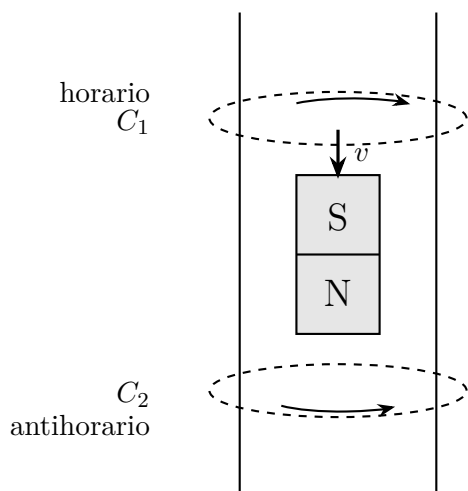
**Problema 1** (3 puntos) — En la clase de Aula Magna vimos un experimento en el que un imán de cierta masa caía lentamente dentro de un tubo de aluminio. La figura muestra un esquema del experimento, asumiendo que el imán cae con el polo norte hacia abajo.

a) (2 puntos) Explique por qué el imán cae lentamente dentro del tubo de aluminio. Para ello, considere las dos curvas cerradas  $C_1$  y  $C_2$  mostradas en la figura. Dibuje el sentido de la corriente inducida en cada una de ellas y explique brevemente por qué aparecen tales corrientes y por qué tienen los sentidos elegidos.

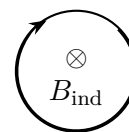


**Solución:**

Cuando el imán cae dentro del tubo de aluminio, el flujo magnético a través de distintas secciones del tubo cambia con el tiempo. Como el aluminio es conductor, ese cambio de flujo induce corrientes en el tubo, llamadas corrientes de Foucault. De acuerdo con la ley de Lenz, dichas corrientes aparecen con el sentido necesario para oponerse al cambio de flujo que las produce.

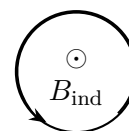


**En  $C_1$ :**  
el imán se aleja  
el flujo hacia abajo disminuye



campo entrando al plano  
(visto desde arriba)

**En  $C_2$ :**  
el imán se acerca  
el flujo hacia abajo aumenta



campo saliendo del plano  
(visto desde arriba)

En  $C_1$ , el imán se aleja y el flujo magnético hacia abajo disminuye. Por la ley de Lenz, la corriente inducida debe generar un campo hacia abajo; por ello, su sentido es horario visto desde arriba.

En  $C_2$ , el imán se acerca y el flujo magnético hacia abajo aumenta. La corriente inducida debe oponerse a ese aumento generando un campo hacia arriba; por ello, su sentido es antihorario visto desde arriba.

Estas corrientes inducidas producen fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento del imán. En la parte superior aparece una interacción que tiende a retener al imán, mientras que en la parte inferior aparece otra que tiende a frenar su descenso. En conjunto, ambas originan una fuerza magnética neta hacia arriba, por lo que el imán no cae libremente, sino más lentamente.

b) (1 punto) El aluminio del experimento no es un material ferromagnético. Si el tubo fuese ahora de un material ferromagnético, explica brevemente qué ocurriría en el experimento.

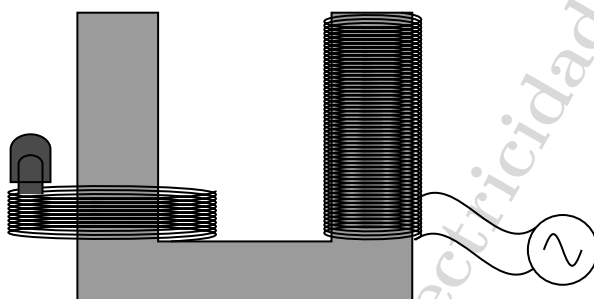
**Solución:**

Si el tubo fuese ferromagnético, se magnetizaría intensamente en presencia del imán. En ese caso, ya no solo habría corrientes inducidas por el cambio de flujo, sino también una fuerte atracción magnética entre el imán y el material del tubo. En la práctica, el imán podría pegarse a la pared, rozar más fuertemente o quedar muy frenado.

Si el material ferromagnético además es conductor, también aparecerían corrientes de Foucault; sin embargo, el efecto dominante podría ser la fuerte atracción ferromagnética.

**Problema 2** (2,5 puntos) — En la figura se muestra el esquema de un experimento realizado en el Aula Magna. Una fuente de voltaje alterno ( $V_{AC} \sim$ ) alimenta un solenoide enrollado alrededor de un núcleo de hierro en forma de U. En el otro extremo del núcleo se coloca, en reposo, una espira circular conectada a un foquito, sin estar conectada a ninguna fuente externa. Como resultado, el foquito se enciende.

a) (1 punto) Si el núcleo de hierro en forma de U fuese reemplazado por un núcleo de cerámica de la misma forma, ¿el foquito se encendería con la misma intensidad que en el caso del núcleo de hierro? Explique su respuesta.



**Solución:**

No se encendería con la misma intensidad. El núcleo de hierro ayuda a concentrar y dirigir el campo magnético producido por el solenoide hacia la espira conectada al foquito. De esta manera, el flujo magnético que atraviesa la espira cambia de forma apreciable y se induce una fem suficiente para encender el foquito. Si el hierro se reemplaza por cerámica, el campo magnético producido por el solenoide ya no se guía con la misma eficiencia hacia la espira. Por ello, el cambio de flujo magnético a través de la espira sería menor. Según la ley de Faraday-Lenz, una menor variación de flujo produce una menor fem inducida, por lo que el foquito brillaría menos o incluso podría no encenderse de forma apreciable.

El brillo disminuye, porque llega menos flujo magnético variable a la espira.

b) (0,75 puntos) Si se reemplaza la fuente de voltaje alterno ( $V_{AC}$ ) por una fuente de voltaje directo ( $V_{DC}$ ), estando el foquito inicialmente apagado, ¿qué ocurriría con el foquito desde el instante en que se enciende la fuente? Justifique su respuesta.

**Solución:**

Con una fuente de voltaje directo, al encender la fuente la corriente en el solenoide no pasa instantáneamente de cero a su valor final, sino que cambia durante un breve intervalo transitorio. En ese intervalo también cambia el flujo magnético a través de la espira del foquito, por lo que se induce una fem momentánea.

Sin embargo, una vez que la corriente alcanza un valor constante, el campo magnético producido por el solenoide también permanece constante. En consecuencia, el flujo magnético deja de variar y ya no se induce fem en la espira.

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$$

Por ello, el foquito solo podría dar un destello inicial y luego se apagaría.

El foquito podría encenderse momentáneamente y luego se apagaría.

c) (0,75 puntos) Si cambiamos el solenoide conectado a la fuente ( $V_{AC}$ ) por otro que tenga un menor número de vueltas que el del foquito., ¿el brillo del foquito aumenta, disminuye o permanece igual? Explica tu respuesta.

**Solución:**

En una descripción ideal, el sistema puede interpretarse como un transformador: el solenoide conectado a la fuente actúa como primario y la espira conectada al foquito como secundario. En ese caso, el voltaje inducido en la espira depende de la relación entre el número de vueltas del primario y del secundario:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}.$$

Si el solenoide conectado a la fuente tiene menos vueltas que la espira del foquito, entonces  $N_p < N_s$ . Por tanto, el voltaje inducido en el secundario sería mayor que el voltaje aplicado al primario:

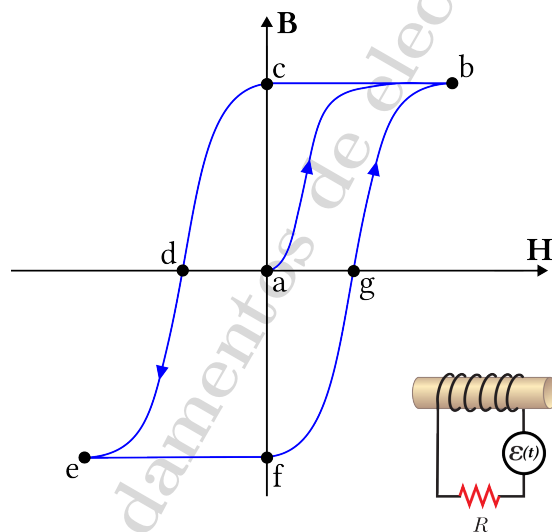
$$V_s > V_p.$$

En consecuencia, el foquito recibiría un mayor voltaje inducido y su brillo aumentaría, suponiendo un comportamiento ideal, sin pérdidas importantes y sin saturación del núcleo.

El brillo aumenta, porque el sistema se comporta como un transformador elevador.

**Problema 3** (2 puntos) — En la figura se muestra la curva de histéresis de un material ferromagnético usado como núcleo en un solenoide. En esta curva,  $H$  representa el campo magnético aplicado por el solenoide y  $B$  el campo magnético resultante en el núcleo.

a) (1 punto) Describa el comportamiento de la curva desde el punto **a** hasta el punto **b**. Además, explique por qué en el punto **b** se alcanza la saturación magnética del material.



**Solución:**

Desde el punto *a* hasta el punto *b*, el campo magnético aplicado  $H$  aumenta en el sentido positivo. Al inicio, pequeños aumentos de  $H$  producen un aumento importante del campo magnético resultante  $B$ , porque muchos dominios magnéticos del material comienzan a orientarse en la dirección del campo aplicado.

Sin embargo, conforme  $H$  sigue aumentando, cada vez quedan menos dominios por alinear. Por eso, el crecimiento de  $B$  se vuelve más lento. Cerca del punto *b*, la mayoría de los dominios magnéticos ya se encuentran orientados en la dirección de  $H$ , de modo que aumentar más el campo aplicado produce solo un pequeño cambio adicional en  $B$ .

A esta situación se le llama saturación magnética.

En *b*, el material está aproximadamente saturado: sus dominios están casi alineados.

b) (1 punto) Si el campo magnético aplicado al núcleo disminuye lentamente hasta hacerse nulo, explique brevemente qué representa el punto **c** en la curva de histéresis.

**Solución:**

Si desde el punto *b* se disminuye lentamente el campo aplicado *H* hasta hacerlo nulo, el material no regresa al punto *a*. Debido a la histéresis, parte de los dominios permanece alineada aun cuando el campo aplicado externo se ha anulado.

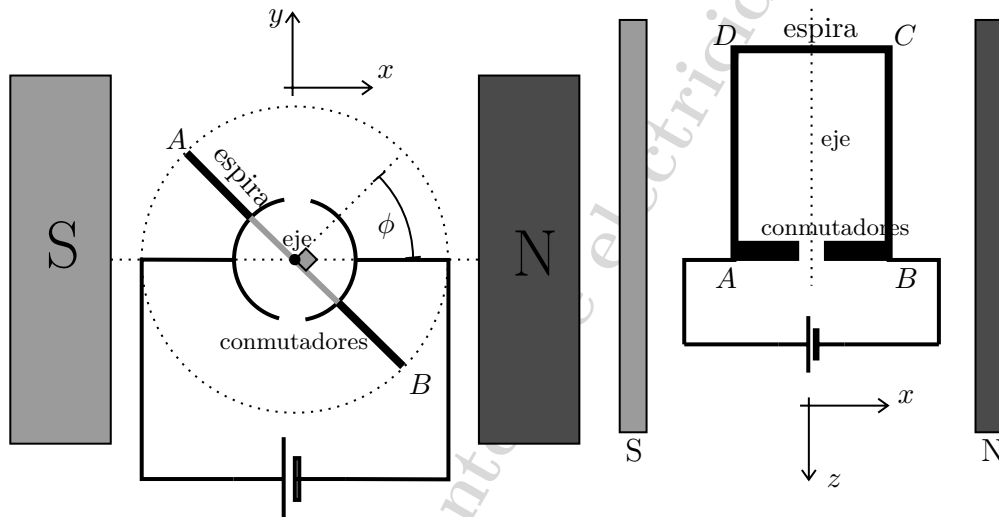
Por ello, el punto *c* representa el valor de *B* cuando

$$H = 0,$$

pero el campo magnético resultante en el núcleo todavía es distinto de cero. Este valor se denomina inducción remanente o magnetización remanente.

El punto *c* representa la remanencia magnética del material.

**Problema 4** (4 puntos) — La figura representa una espira rectangular *ABCD*, capaz de rotar alrededor del eje *z*, ubicada entre dos imanes que producen un campo magnético uniforme de magnitud  $B = 0,50 \text{ T}$ . La espira es alimentada por una fuente de voltaje directo de  $V = 45 \text{ V}$  y posee una resistencia interna de  $R = 12 \Omega$ . Las dimensiones de la espira son  $AD = 12 \text{ cm}$  y  $DC = 8 \text{ cm}$ . En el instante mostrado, el vector normal al plano de la espira forma un ángulo  $\phi = 50^\circ$  con el eje *x*.



a) (1,5 puntos) Determine la fuerza magnética que actúa sobre el segmento *AD* en el instante mostrado.

**Solución:**

Como la fuente es de voltaje directo y la resistencia interna de la espira es  $R = 12 \Omega$ , se tiene

$$I = \frac{V}{R} = \frac{45}{12} = 3,75 \text{ A}.$$

Además, el campo magnético va desde el polo norte hacia el polo sur. De acuerdo con la orientación mostrada en la figura, y tomando el eje *x* positivo hacia la derecha, el campo magnético apunta en la dirección  $-x$ . Por tanto,

$$\vec{B} = -0,50 \hat{i} \text{ T}.$$

En el segmento *AD*, la corriente circula desde *A* hacia *D*. Por ello, el vector longitud asociado a este tramo apunta en la dirección  $-z$ . Como  $AD = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$ , se puede escribir

$$\vec{L}_{AD} = -0,12 \hat{k} \text{ m}.$$

La fuerza magnética sobre un conductor recto que transporta corriente está dada por

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{AD} &= I \left( -0,12 \hat{k} \right) \times (-0,50 \hat{i}) \\ &= I(0,12)(0,50) \left( \hat{k} \times \hat{i} \right) \\ &= (3,75)(0,12)(0,50) \hat{j}.\end{aligned}$$

La fuerza magnética sobre el segmento  $AD$  es

$$\boxed{\vec{F}_{AD} = 0,225 \hat{j} \text{ N}}.$$

b) (1,5 puntos) Determine la fuerza magnética que actúa sobre el segmento  $DC$  en el instante mostrado.

**Solución:**

El segmento  $DC$  se encuentra en el plano  $xy$ . Además, como la espira gira alrededor del eje  $z$ , el vector normal de la espira también está en el plano  $xy$ . Si dicho vector normal forma un ángulo  $\phi$  con el eje  $x$ , entonces el segmento  $DC$ , al ser perpendicular al vector normal, forma un ángulo  $90^\circ - \phi$  con el eje  $x$ . De acuerdo con la orientación de la corriente mostrada en la figura, la corriente circula de  $D$  hacia  $C$ . Por ello, el vector longitud del segmento  $DC$  puede escribirse como

$$\vec{L}_{DC} = L_{DC} (\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{j}).$$

Como  $L_{DC} = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$  y  $\phi = 50^\circ$ ,

$$\vec{L}_{DC} = 0,08 (\sin 50^\circ \hat{i} - \cos 50^\circ \hat{j}) \text{ m}.$$

El campo magnético apunta en la dirección  $-x$ , por lo que

$$\vec{B} = -0,50 \hat{i} \text{ T}.$$

Entonces, la fuerza magnética sobre el segmento  $DC$  es

$$\begin{aligned}\vec{F}_{DC} &= I \vec{L}_{DC} \times \vec{B} \\ &= (3,75) [0,08 (\sin 50^\circ \hat{i} - \cos 50^\circ \hat{j})] \times (-0,50 \hat{i}).\end{aligned}$$

El término con  $\hat{i} \times \hat{i}$  es cero. Por tanto, solo contribuye la componente en  $-\hat{j}$ :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{DC} &= (3,75)(0,08)(0,50) \cos 50^\circ (\hat{j} \times \hat{i}) \\ &= -(3,75)(0,08)(0,50) \cos 50^\circ \hat{k}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\vec{F}_{DC} = -9,64 \times 10^{-2} \hat{k} \text{ N}}$$

c) (1 punto) Determine la magnitud del torque magnético que actúa sobre la espira en el instante mostrado.

**Solución:**

El área de la espira rectangular es

$$A = (AD)(DC) = (0,12)(0,08) = 9,60 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

El torque magnético sobre una espira con corriente se calcula mediante

$$\tau = NIAB \sin \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector normal de la espira y el campo magnético. En este caso, el vector normal forma un ángulo  $\phi = 50^\circ$  con el eje  $x$ , mientras que el campo magnético apunta en la dirección  $-x$ . Por ello, el ángulo entre  $\vec{B}$  y el vector normal es

$$\theta = 180^\circ - \phi.$$

Sin embargo,

$$\sin(180^\circ - \phi) = \sin \phi.$$

Por tanto, usando  $N = 1$ ,  $I = 3,75$  A,  $B = 0,50$  T y  $\phi = 50^\circ$ ,

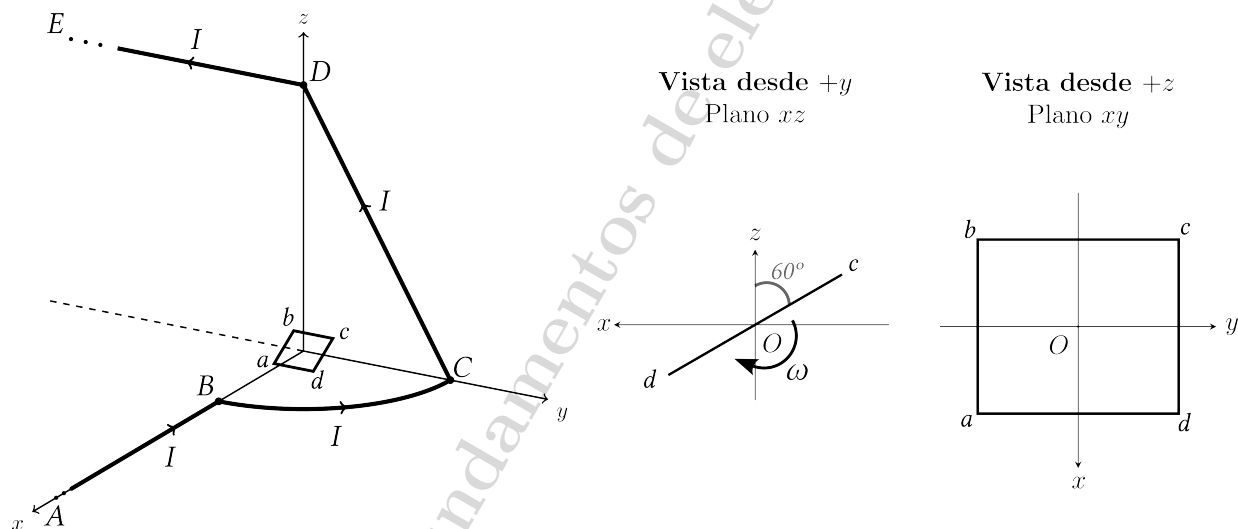
$$\begin{aligned}\tau &= (1)(3,75)(9,60 \times 10^{-3})(0,50) \sin 50^\circ \\ &= 1,38 \times 10^{-2} \text{ N m}.\end{aligned}$$

Así, la magnitud del torque magnético sobre la espira es

$$\tau = 1,38 \times 10^{-2} \text{ N m}.$$

**Problema 5** (6,25 puntos) — En la figura se muestra un alambre conductor muy largo que transporta una corriente constante  $I = 2,8$  A. El alambre está formado por varios tramos: un segmento recto  $AB$  sobre el eje  $x$ , un arco circular  $BC$  en el plano  $xy$ , un segmento inclinado  $CD$  en el plano  $yz$  y un tramo recto  $DE$  que se prolonga indefinidamente en dirección  $-y$ , tal como se indica en la figura.

En el origen se encuentra una espira cuadrada  $abcd$ , de lado 6 cm. Según las vistas de la derecha, la espira forma inicialmente un ángulo de  $60^\circ$  con el eje  $z$  en el plano  $xz$ . Desde  $t = 0$ , la espira gira alrededor del eje  $y$  con rapidez angular constante  $\omega = 25$  rad/s, en sentido horario según la vista indicada.



a) (0,5 puntos) Halle el campo magnético en el origen  $O$  debido únicamente al segmento  $AB$ , ubicado sobre el eje  $x$ , cuyo extremo más cercano al origen es  $B(5; 0; 0)$  m. Justifica tu respuesta.

**Solución:**

El segmento  $AB$  está ubicado sobre el eje  $x$ , y el origen  $O$  también se encuentra sobre esa misma línea. Es decir, el punto donde queremos calcular el campo está justo sobre la prolongación del conductor.

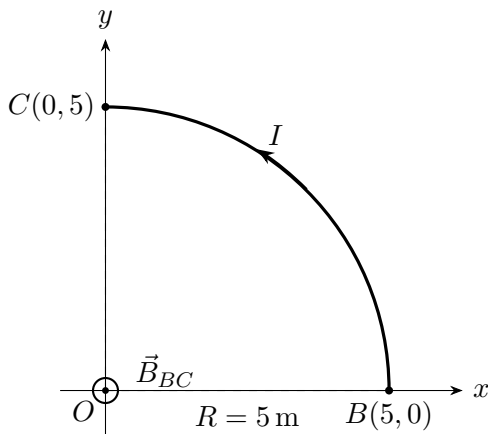
Para un conductor recto, el campo magnético se forma alrededor del conductor, no sobre la misma línea donde está el cable. Por eso, como el origen está alineado con el segmento  $AB$ , este tramo no produce campo magnético en  $O$ .

Por tanto,

$$\vec{B}_{AB} = \vec{0}.$$

b) (0,75 punto) Halle el campo magnético en el origen  $O$  debido únicamente al arco circular  $BC$ , con centro en el origen, cuyos extremos son  $B(5;0;0)$  m y  $C(0;5;0)$  m.

**Solución:**



El tramo  $BC$  es un arco circular cuyo centro se encuentra en el origen  $O$ . De acuerdo con la figura, su radio es

$$R = 5 \text{ m},$$

y el arco abarca un ángulo de  $90^\circ$ . Para el campo magnético en el centro de un arco circular se usa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{\theta}{360^\circ} \right).$$

Como  $\theta = 90^\circ$ , se tiene

$$\begin{aligned} B_{BC} &= \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{90^\circ}{360^\circ} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{8R} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(2,8)}{8(5)} \\ &= 8,80 \times 10^{-8} \text{ T}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{B}_{BC} = 8,80 \times 10^{-8} \hat{k} \text{ T}.$$

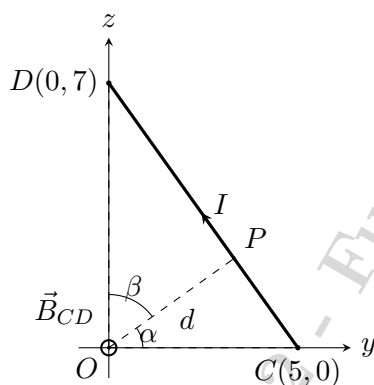
c) (1,25 puntos) Halle el campo magnético en el origen  $O$  debido únicamente al segmento  $CD$ , que une los puntos  $C(0;5;0)$  m y  $D(0;0;7)$  m.

**Solución:**

Para este tramo, analizamos solo el plano  $yz$ , ya que el segmento  $CD$  se encuentra en dicho plano. En esta vista, los puntos son

$$C = (5, 0), \quad D = (0, 7),$$

donde las coordenadas corresponden a  $(y, z)$ , en metros.



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \alpha + \sin \beta).$$

Como la longitud del segmento es

$$CD = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} \text{ m},$$

la distancia perpendicular desde  $O$  hasta la recta que contiene a  $CD$  es

$$d = \frac{35}{\sqrt{74}} \text{ m}.$$

Además, de la geometría del triángulo,

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}, \quad \sin \beta = \frac{7}{\sqrt{74}}.$$

Entonces,

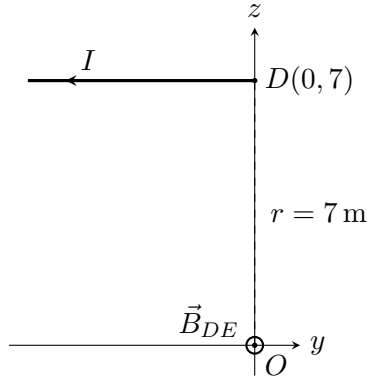
$$\begin{aligned} B_{CD} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \alpha + \sin \beta) \\ &= \frac{(10^{-7})(2,8)}{\left( \frac{35}{\sqrt{74}} \right)} \left( \frac{12}{\sqrt{74}} \right) \\ &= 9,60 \times 10^{-8} \text{ T}. \end{aligned}$$

$$\vec{B}_{CD} = 9,60 \times 10^{-8} \hat{i} \text{ T}.$$

d) (1 punto) Halle el campo magnético en el origen  $O$  debido únicamente al segmento  $DE$ , que parte del punto  $D(0; 0; 7)$  m y se prolonga indefinidamente en dirección paralela al eje  $-y$ .

**Solución:**

El tramo  $DE$  parte del punto  $D = (0, 0, 7)$  y se prolonga indefinidamente en dirección paralela al eje  $-y$ . Por ello, conviene analizar la situación en el plano  $yz$ .



Usamos entonces la expresión para un conductor recto finito:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha + \sin \beta).$$

Sustituyendo,

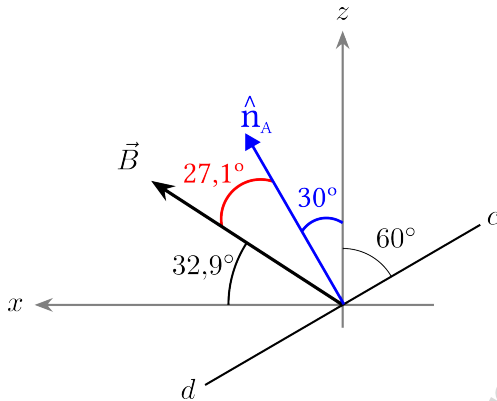
$$\begin{aligned} B_{DE} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin 90^\circ + \sin 0^\circ) \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(2,8)}{4\pi(7)} (1 + 0) \\ &= 4,0 \times 10^{-8} \text{ T.} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{B}_{DE} = 4,0 \times 10^{-8} \hat{i} \text{ T.}$$

e) (2 puntos) Considerando que la espira  $abcd$  es muy pequeña y que el campo magnético en su centro es aproximadamente igual al campo magnético en toda su superficie, determine la fem inducida en la espira en función del tiempo. Para ello, considere que el campo magnético en el centro de la espira está dado por  $\vec{B} = (13,6 \hat{i} + 8,80 \hat{k}) \times 10^{-6} \text{ T}$ .

**Solución:**



Como la espira es cuadrada, su área es

$$A = (0,06)^2 = 3,60 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

La magnitud del campo magnético es

$$B = \sqrt{(13,6)^2 + (8,80)^2} \times 10^{-6} = 1,62 \times 10^{-5} \text{ T.}$$

De acuerdo con la figura de referencia, en el instante  $t = 0$  el ángulo entre el campo magnético  $\vec{B}$  y el vector normal de área  $\hat{n}_A$  es

$$\theta_0 = 27,1^\circ.$$

Como la espira gira con rapidez angular constante y el ángulo aumenta con el tiempo, se tiene

$$\theta(t) = 27,1^\circ + \omega t.$$

Entonces, el flujo magnético a través de la espira es

$$\Phi_B(t) = BA \cos \theta(t).$$

Sustituyendo los valores numéricos,

$$\Phi_B(t) = (1,62 \times 10^{-5})(3,60 \times 10^{-3}) \cos(27,1^\circ + 25t).$$

Así,

$$\Phi_B(t) = 5,83 \times 10^{-8} \cos(27,1^\circ + 25t) \text{ Wb.}$$

Aplicando la ley de Faraday,

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= -\frac{d}{dt} [5,83 \times 10^{-8} \cos(27,1^\circ + 25t)] \\ &= - (5,83 \times 10^{-8}) (-25) \sin(27,1^\circ + 25t). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathcal{E}(t) = 1,46 \times 10^{-6} \sin(27,1^\circ + 25t) \text{ V}$$

f) (0,75 puntos) Para la espira  $abcd$ , determine el sentido de la corriente inducida en un pequeño instante después de  $t = 0$ , visto desde el eje  $+z$ . Indique si la corriente circula en el sentido  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  o en el sentido contrario. Justifique su respuesta.

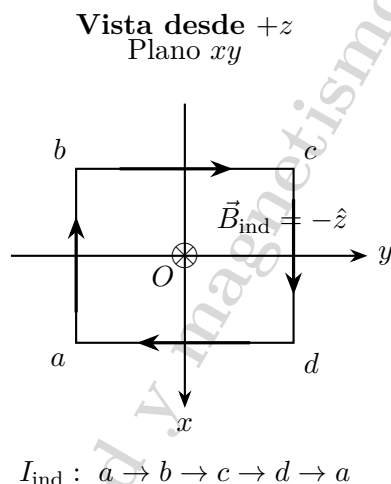
**Solución:**

Visto desde el eje  $+z$ , la espira se observa en el plano  $xy$ . De acuerdo con la figura, el sentido  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  corresponde a un sentido horario.

Para un pequeño instante después de  $t = 0$ , el flujo magnético externo a través de la espira aumenta en la dirección  $+\hat{z}$ . Por la ley de Faraday-Lenz, la corriente inducida debe oponerse a dicho aumento de flujo; por lo tanto, debe generar un campo magnético inducido en la dirección  $-\hat{z}$ .

Usando la regla de la mano derecha, un campo magnético inducido hacia  $-\hat{z}$  corresponde, visto desde  $+z$ , a una corriente en sentido horario. Por lo tanto, la corriente inducida circula en el sentido

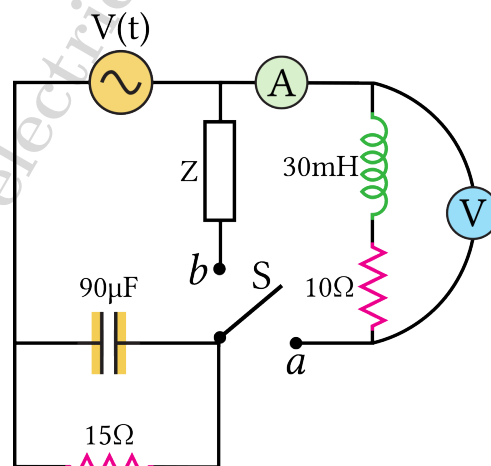
$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a.$$



**Problema 6** (5,25 puntos) — En el circuito mostrado, la fuente suministra un voltaje alterno  $V(t)$  de frecuencia  $f = 60 \text{ Hz}$ . El circuito contiene dos resistencias de  $10 \Omega$  y  $15 \Omega$ , un capacitor de  $90 \mu\text{F}$ , una bobina de  $30 \text{ mH}$  y un aparato electrónico de impedancia  $Z$ . Considere que el amperímetro y el voltímetro son ideales.

Inicialmente, el interruptor  $S$  está abierto. Luego, se cierra en la posición  $a$ . En esta condición, la corriente que circula por la resistencia de  $15 \Omega$  es

$$i = 1,2 \angle 30^\circ \text{ A}.$$



a) (0,5 puntos) Determine el voltaje en el capacitor de  $90 \mu\text{F}$  en forma fasorial ( $z \angle \theta$ ).

**Solución:**

Cuando el interruptor  $S$  está conectado en  $a$ , el capacitor está en paralelo con la resistencia de  $15 \Omega$ . Por ello, ambos tienen el mismo voltaje.

La corriente que circula por la resistencia de  $15 \Omega$  es

$$I_{15} = 1,2 \angle 30^\circ \text{ A}.$$

Entonces,

$$V_C = V_{15} = I_{15}(15).$$

Por tanto,

$$V_C = (1,2 \angle 30^\circ)(15) = 18 \angle 30^\circ \text{ V}.$$

$$V_C = 18 \angle 30^\circ \text{ V}.$$

b) (1 punto) Determine la lectura del amperímetro  $A$  cuando  $S$  está conectado en  $a$ .

**Solución:**

Primero calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377 \text{ rad/s.}$$

La impedancia del capacitor de  $90 \mu\text{F}$  es

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ.$$

Como  $C = 90 \times 10^{-6} \text{ F}$ ,

$$|Z_C| = \frac{1}{(377)(90 \times 10^{-6})} = 29,47 \Omega.$$

Por tanto,

$$Z_C = 29,47 \angle -90^\circ \Omega.$$

Primero reducimos el paralelo formado por la resistencia de  $15 \Omega$  y el capacitor de  $90 \mu\text{F}$ .

La impedancia del capacitor es

$$Z_C = 29,47 \angle -90^\circ \Omega.$$

Entonces,

$$Z_p = 15 \parallel Z_C = \frac{(15)(29,47 \angle -90^\circ)}{15 + 29,47 \angle -90^\circ}.$$

Al efectuar la operación,

$$Z_p = 13,37 \angle -26,98^\circ \Omega.$$

c) (1 punto) Determine la lectura del voltímetro  $V$  cuando  $S$  está conectado en  $a$ .

**Solución:**

La impedancia de la bobina de  $30 \text{ mH}$  es

$$Z_L = \omega L \angle 90^\circ.$$

Como  $\omega = 377 \text{ rad/s}$  y  $L = 30 \times 10^{-3} \text{ H}$ ,

$$Z_L = (377)(30 \times 10^{-3}) \angle 90^\circ = 11,31 \angle 90^\circ \Omega.$$

Esta bobina está en serie con la resistencia de  $10 \Omega$ , por lo que la impedancia equivalente de esa rama es

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L.$$

En forma polar,

$$Z_{RL} = 15,09 \angle 48,52^\circ \Omega.$$

Del ítem anterior, la corriente que circula por esta rama es

Del ítem anterior, el voltaje en el capacitor, y por tanto en todo el paralelo, es

$$V_C = 18 \angle 30^\circ \text{ V.}$$

Por ello, la corriente total que entra al paralelo, que es la corriente medida por el amperímetro, es

$$I_A = \frac{V_C}{Z_p}.$$

Así,

$$I_A = \frac{18 \angle 30^\circ}{13,37 \angle -26,98^\circ} = 1,35 \angle 56,98^\circ \text{ A.}$$

Este valor corresponde a la corriente máxima fasorial. Como el amperímetro ideal mide valor eficaz,

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1,35}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, la lectura del amperímetro es

$$A = 0,95 \text{ A.}$$

$$I_A = 1,35 \angle 56,98^\circ \text{ A.}$$

Por tanto, el voltaje fasorial medido por el voltímetro es

$$V_{RL} = I_A Z_{RL}.$$

Entonces,

$$V_{RL} = (1,35 \angle 56,98^\circ)(15,09 \angle 48,52^\circ) = 20,37 \angle 105,50^\circ \text{ V.}$$

Este voltaje fasorial corresponde al valor máximo. Como el voltímetro ideal mide valor eficaz,

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{20,37}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto, la lectura del voltímetro es

$$V = 14,40 \text{ V.}$$

d) (1,25 puntos) Determine el voltaje de la fuente  $V(t)$  en forma sinusoidal.

**Solución:**

De los incisos anteriores, ya se tienen las dos impedancias equivalentes:

$$Z_p = 13,37\angle -26,98^\circ \Omega,$$

para el paralelo entre la resistencia de  $15\Omega$  y el capacitor, y

$$Z_{RL} = 15,09\angle 48,52^\circ \Omega,$$

para la rama formada por la resistencia de  $10\Omega$  y la bobina.

Como ambas impedancias están conectadas en serie, la impedancia equivalente total es

$$Z_{eq} = Z_p + Z_{RL}.$$

Por tanto,

$$Z_{eq} = 22,53\angle 13,42^\circ \Omega.$$

Del ítem anterior, la corriente total del circuito es

$$I_A = 1,35\angle 56,98^\circ \text{ A}.$$

El voltaje fasorial de la fuente se obtiene mediante

$$V_s = I_A Z_{eq}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V_s &= (1,35\angle 56,98^\circ)(22,53\angle 13,42^\circ) \\ &= 30,4\angle 70,4^\circ \text{ V}. \end{aligned}$$

Como la frecuencia es  $f = 60 \text{ Hz}$ ,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60) = 377 \text{ rad/s}.$$

Por lo tanto, el voltaje de la fuente en forma sinusoidal es

$$V(t) = 30,4 \sin(377t + 70,4^\circ) \text{ V}.$$

Posteriormente, el interruptor  $S$  se cierra en la posición  $b$ , dejando abierta la posición  $a$ . En esta nueva configuración, el voltaje en el capacitor de  $90\mu\text{F}$  es

$$V = 48,7\angle 24^\circ \text{ V}.$$

e) (1,5 puntos) Determine la impedancia  $Z$  del aparato electrónico.

**Solución:**

Cuando el interruptor  $S$  se conecta en la posición  $b$ , el voltaje en el capacitor es

$$V_C = 48,7\angle 24^\circ \text{ V}.$$

Como el capacitor está en paralelo con la resistencia de  $15\Omega$ , ambos tienen el mismo voltaje. Además, la impedancia equivalente de ese paralelo ya fue calculada anteriormente:

$$Z_p = 13,37\angle -26,98^\circ \Omega.$$

Por tanto, la corriente total es

$$I = \frac{V_C}{Z_p}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \frac{48,7\angle 24^\circ}{13,37\angle -26,98^\circ} \\ &= 3,64\angle 50,98^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

Del ítem anterior, el voltaje fasorial de la fuente es

$$V_s = 30,4\angle 70,4^\circ \text{ V}.$$

Como el aparato electrónico está en serie con el paralelo, se cumple

$$V_s = V_Z + V_C.$$

Por ello,

$$V_Z = V_s - V_C.$$

Sustituyendo los fasores,

$$V_Z = 30,4\angle 70,4^\circ - 48,7\angle 24^\circ = 35,4\angle 165,7^\circ \text{ V}.$$

Finalmente, la impedancia del aparato electrónico se obtiene de

$$Z = \frac{V_Z}{I}.$$

Así,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{35,4\angle 165,7^\circ}{3,64\angle 50,98^\circ} \\ &= 9,74\angle 114,7^\circ \Omega. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Z = 9,74\angle 114,7^\circ \Omega.$$