

Examen Final

Apellidos y Nombres: _____ Teoría: _____

Indicaciones

- La duración del examen es de 100 minutos.
- Se permite el uso personal de calculadoras.
- No se permite el uso de celulares, relojes o cualquier otro dispositivo de comunicación.
- No se permite el uso de copias, apuntes, libros u hojas propias.
- De usar una fórmula que no se encuentre en el formulario debe demostrarla.
- **No se asignará puntaje a las respuestas o soluciones que carezcan de justificación o procedimiento. Tampoco, se le asignará puntaje a los procedimientos o soluciones desordenadas o que no se entiendan claramente.**

En el suministro de energía eléctrica, las centrales hidroeléctricas son esenciales al transformar la energía del agua en electricidad mediante turbinas y generadores. El examen aborda el funcionamiento de una central que abastece a una ciudad, donde una turbina conectada a un generador opera a una frecuencia constante de 50 Hz.

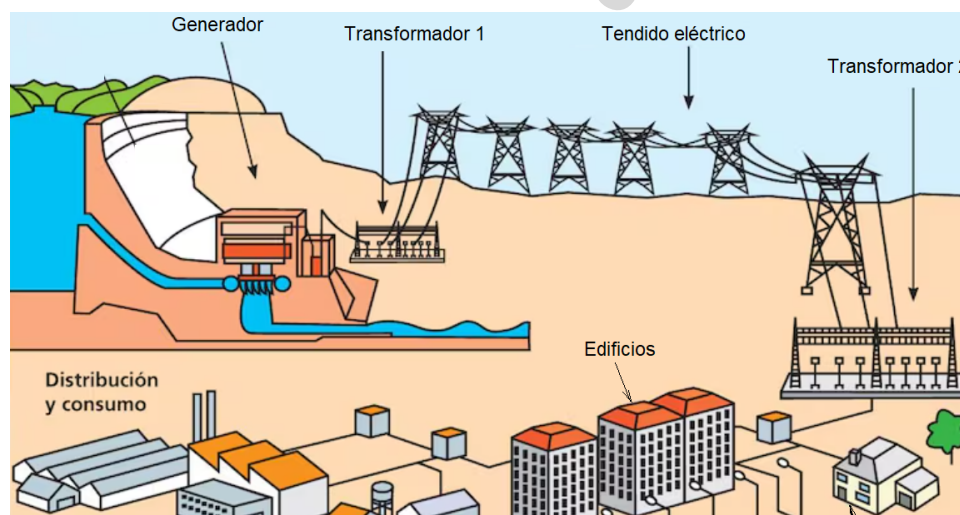


Figura 1: Esquema del proceso de generación y distribución de energía en una central hidroeléctrica.

Pregunta 1: Análisis del generador

El generador cuenta con 10 espiras rectangulares muy juntas, cada una de 1,2 m de largo y 1 m de ancho, ubicadas dentro de un campo magnético uniforme de 3 T. Estas espiras giran mecánicamente a una frecuencia de 50 Hz. Desde la perspectiva del observador, el plano de las espiras forma un ángulo inicial de 64° con el campo magnético y gira en sentido horario. La salida del generador se conecta a una lámpara (foco) con una resistencia eléctrica de $4\ \Omega$ mediante anillos colectores.

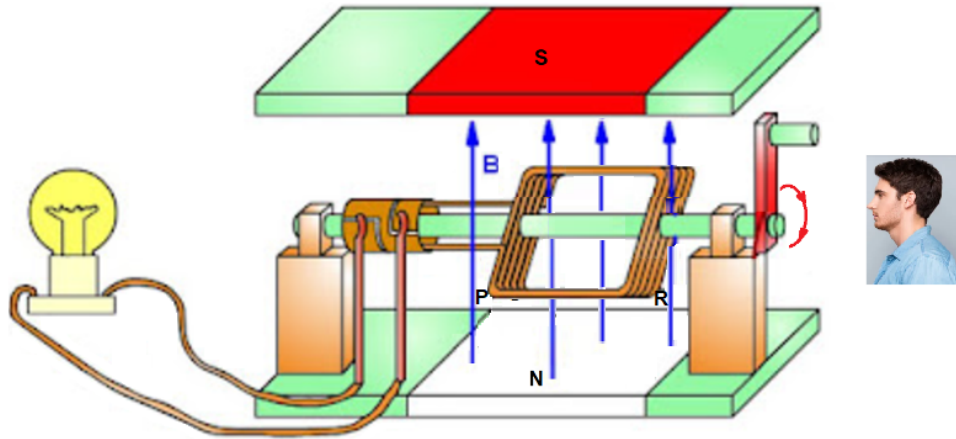


Figura 2: Esquema del generador

- a) (2 puntos) Determine el sentido de la corriente a través de la espira un **instante después** de iniciado su movimiento, va de P hacia R (hacia la derecha) o de R hacia P (hacia la izquierda). Explique y justifique su respuesta.

A medida que la espira rota en sentido horario, el número de líneas de campo que la atraviesan aumenta; por lo tanto, el flujo magnético también aumenta.

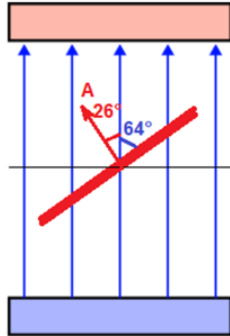
Se inducirá un campo magnético oponiéndose a este aumento, por lo que el campo inducido irá en dirección contraria al campo del imán; esto es, hacia abajo.

Esto implica que la dirección de la corriente en la espira será de

R hacia P.

- b) (2,5 puntos) Demuestre que la magnitud del voltaje inducido en la espira es $11309,7 \sin(0,45 - 314,16t)$ V, donde t está en segundos.

Planteamos el vector área apuntando en la dirección mostrada. El ángulo inicial que formará con el campo magnético es 26° .



La rapidez angular será dada por:

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s} \approx 314,16 \text{ rad/s}$$

Teniendo en cuenta que el ángulo disminuye en el instante inicial, el ángulo en función del tiempo será:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 - \omega t = 26^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) - \omega t \\ \theta &= \frac{13\pi}{90} - 100\pi t \\ \theta &\approx 0,45 - 314,16t\end{aligned}$$

El flujo magnético será:

$$\begin{aligned}\Theta &= BA \cos \theta \\ \Theta &= 3 \cdot 1,2 \cdot 1,0 \cos \frac{13\pi}{90} - 100\pi t \\ \Theta &\approx 3,6 \cos(0,45 - 314,16t) \text{ Wb}\end{aligned}$$

Por tanto, el voltaje inducido se calcula como:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{ind}| &= N \left| \frac{d\Theta}{dt} \right| \\ |\epsilon_{ind}| &\approx 10 \cdot |-3,6 \cdot 314,16 \cdot \text{sen}(0,45 - 314,16t)| \\ |\epsilon_{ind}| &\approx 11309,7 \text{ V} \cdot |\text{sen}(0,45 - 314,16t)|\end{aligned}$$

c) (1 punto) ¿Cómo afecta al funcionamiento del generador reemplazar los anillos colectores por un conmutador? Explique con detalle.

En un generador, el conmutador es un componente que permite convertir la corriente alterna (AC), generada en las espiras, en corriente continua (DC).

Su funcionamiento se basa en cambiar las conexiones entre las bobinas y las escobillas del generador en cada medio ciclo o media vuelta. Esto rectifica la corriente inducida a la **salida de las espiras**, de manera que la salida mantenga siempre la misma dirección, produciendo una corriente continua o directa.

Pregunta 2: Funcionamiento de los transformadores

En una primera aproximación, se considera que los transformadores son **ideales**. El transformador 1 cuenta con 40 vueltas en su devanado primario, opera con el voltaje inducido en la espira (pregunta 1) y genera un voltaje de salida de 169645,5 V. Este voltaje es transmitido a través de cables de alta tensión desde la central hidroeléctrica hasta los edificios de la ciudad, donde el transformador 2 lo reduce a 220 V_{rms}.

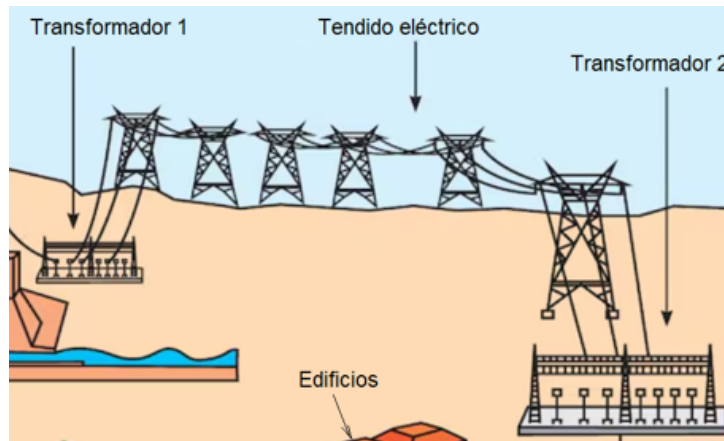


Figura 3: Transformadores en la generación de energía eléctrica

- a) (0,5 puntos) Determine el número de espiras en el devanado secundario del transformador 1.

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

$$\frac{11309,7}{169645,5} = \frac{40}{N_s}$$

$$N_s = 600 \text{ vueltas}$$

$N =$

- b) (2 puntos) ¿Cuál es la finalidad de elevar el voltaje y reducir la corriente para ser transmitida a través del tendido eléctrico desde la central (transformador 1) hasta la ciudad (transformador 2)?

La finalidad es reducir las pérdidas de energía en forma de calor, las cuales están relacionadas con efecto Joule y dependen del cuadrado de la intensidad de corriente.

Por esta razón, cuanto menor sea la corriente, menores serán las pérdidas de energía eléctrica en forma de calor.

c) (1 punto) ¿Por qué el núcleo del transformador es laminado? Si el núcleo fuese sólido de un material paramagnético, ¿de qué manera lo afectaría? Explique detalladamente.

El núcleo es laminado para reducir las corrientes parásitas producidas por un campo magnético cambiante. Si el núcleo fuese sólido, las corrientes parásitas que circulan libremente dentro del núcleo serían mayores, resultando en pérdidas en forma de calor.

Además, un material paramagnético tiene permeabilidad magnética ligeramente mayor que la del vacío y es débilmente atraído por campos magnéticos. Con tales características, no podría concentrar de manera adecuada las líneas de flujo, lo que reduciría la eficiencia del transformador.

d) (2 puntos) Con el objetivo de analizar el comportamiento del sistema, el generador es reemplazado por una batería que alimenta el devanado primario, como se muestra en la figura.

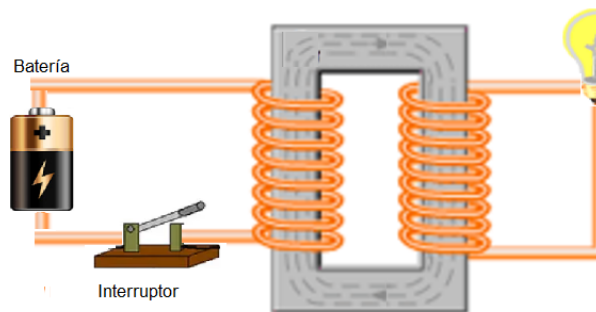


Figura 4: Prueba de funcionamiento de un transformador con batería e interruptor

Inicialmente, el interruptor está abierto. Al cerrarlo, se mantiene cerrado durante unos minutos antes de volver a abrirlo. Explique detalladamente el comportamiento del foco conectado al devanado secundario, desde el momento en que el interruptor está abierto hasta que se abre nuevamente.

1. Cuando el circuito está abierto, no hay campo magnético ni variación de flujo, por lo que el foco permanece apagado.
2. Al cerrar el interruptor, el flujo magnético en las espiras aumenta, generando una corriente inducida que enciende el foco momentáneamente.
3. Una vez que el circuito se estabiliza y el flujo deja de cambiar, no se genera corriente inducida, y el foco se apaga.
4. Al abrir nuevamente el interruptor, el flujo magnético disminuye, generando otra corriente inducida que enciende el foco brevemente.

Pregunta 3: Cableado eléctrico en el hogar

La energía eléctrica generada y transformada previamente es finalmente distribuida a los hogares. En uno de ellos se instala un sistema de cableado eléctrico como se muestra en la figura. Los cables 1 y 2 transportan corrientes de 10 A y 20 A, respectivamente, siguiendo las direcciones indicadas.

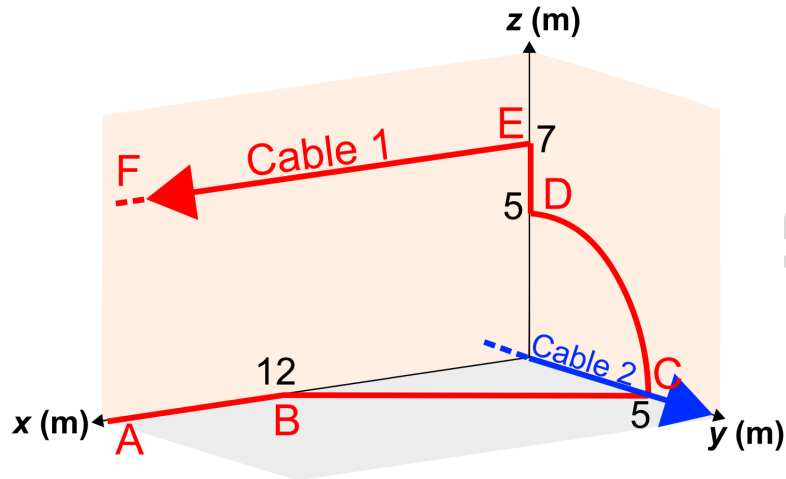


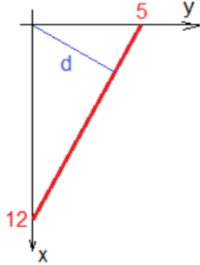
Figura 5: Cableado eléctrico dentro del hogar

- a) (3 puntos) Determinar el campo magnético en el origen de coordenadas producido **únicamente** por cable 1.

El campo magnético en el origen de coordenadas está dado por:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DE} + \vec{B}_{EF}$$

Evaluamos la geometría del lado **BC**:



$$d = 12 \cdot \text{sen} \left(\arctan \left(\frac{5}{12} \right) \right)$$

$$d \approx 12 \cdot \text{sen}(22,62^\circ)$$

$$d \approx 4,6 \text{ m}$$

Calculamos la magnitud del campo magnético por el camino $\overrightarrow{BC}$:

$$B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\text{sen}(22,62^\circ) + \text{sen}(67,38^\circ))$$

$$B_{BC} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot (10)}{4\pi \cdot (4,6)} (\text{sen}(22,62^\circ) + \text{sen}(67,38^\circ))$$

$$B_{BC} = 2,83 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$\vec{B}_{BC} = 2,83 \times 10^{-7} \hat{k} \text{ T}$$

Calculamos la magnitud del campo magnético por el camino $\overrightarrow{CD}$:

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{90^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$B_{CD} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot (10)}{2 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$B_{CD} = 3,14 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$\vec{B}_{CD} = 3,14 \times 10^{-7} \hat{i} \text{ T}$$

Calculamos la magnitud del campo magnético por el camino $\overrightarrow{EF}$:

$$B_{EF} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\text{sen}(0^\circ) + \text{sen}(90^\circ))$$

$$B_{EF} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot (10)}{4\pi \cdot (7)}$$

$$B_{EF} = 1,428 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$\vec{B}_{EF} = 1,428 \times 10^{-7} \hat{j} \text{ T}$$

$$\vec{B} = \boxed{\vec{B}_0 = 3,14 \times 10^{-7} \hat{i} + 1,428 \times 10^{-7} \hat{j} + 2,83 \times 10^{-7} \hat{k} \text{ T}}$$

b) (1 punto) Determinar la fuerza magnética que produce el cable 1 sobre los 15 mm de cable 2 ubicados en el origen de coordenadas.

La fuerza magnética está dada por $\vec{F} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B})$

$$\vec{F} = (20) \cdot (15 \times 10^{-3} \hat{j} \times (3,14 \times 10^{-7} \hat{i} + 1,428 \times 10^{-7} \hat{j} + 2,83 \times 10^{-7} \hat{k}))$$

$$\vec{F} = 8,49 \times 10^{-9} \hat{i} - 9,42 \times 10^{-8} \hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{F} = 8,49 \times 10^{-9} \hat{i} - 9,42 \times 10^{-8} \hat{k} \text{ N}$$

Pregunta 4: Conexiones eléctricas en el hogar

En el siguiente circuito se representa la conexión eléctrica de un televisor, que incluye una resistencia de 300Ω y un capacitor de $60 \mu\text{F}$, junto con un refrigerador compuesto por una resistencia de 25Ω y un inductor de 40 mH . La impedancia del calefactor no se conoce. La fuente que alimenta el circuito opera con un voltaje eficaz (rms) de 220 V y mantiene el mismo ángulo de fase que el generador. Se sabe que la corriente que circula por el refrigerador es $20,7 \sin(26^\circ (\frac{\pi}{180}) - 314,16t) \text{ A}$, donde t está en segundos.

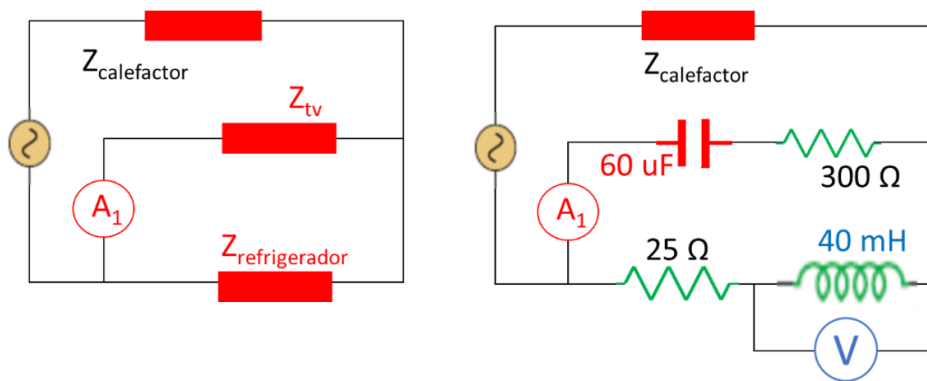


Figura 6: Conexiones eléctricas en el hogar

a) (1,5 puntos) La lectura del voltímetro.

La corriente a través del refrigerador en forma fasorial está dada por:

$$I_{ref} = 20,7 \angle 26^\circ$$

La impedancia de la bobina:

$$Z_L = \omega L \angle 90^\circ$$

$$Z_L = (2\pi \cdot 50) \cdot \left(\frac{40}{1000} \right) \angle 90^\circ$$

$$Z_L = 12,566 \angle 90^\circ \Omega$$

El potencial en el refrigerador está dado por:

$$V_L = I_{ref} \cdot Z_L$$

$$V_L = (20,7 \angle 26^\circ)(12,566 \angle 90^\circ)$$

$$V_L = 260,12 \angle 116^\circ$$

La lectura del voltímetro será el voltaje eficaz a través del refrigerador:

$$V_{rms} = \frac{260,12}{\sqrt{2}} = 183,9 \text{ V}$$

$V =$

b) (2 puntos) Determine la corriente a través del televisor. Exprésela en términos del tiempo y evalúe el valor de la corriente en $t = 2s$.

Impedancias para los componentes del refrigerador (en serie):

$$Z_{R(ref)} = R_{ref}/0^\circ = 25/0^\circ \Omega$$

$$Z_{L(ref)} = \omega L/90^\circ = 12,566/90^\circ \Omega$$

La impedancia del refrigerador será:

$$Z_{ref} = Z_{R(ref)} + Z_{L(ref)} = 27,98/26,68^\circ \Omega$$

Hallamos las impedancias para los componentes del televisor, que están en serie:

$$Z_{R(tv)} = R_{tv}/0^\circ = 300/0^\circ \Omega$$

$$Z_{C(tv)} = \frac{1}{\omega C}/-90^\circ = 53,05/-90^\circ \Omega$$

La impedancia del televisor será:

$$Z_{tv} = Z_{R(tv)} + Z_{C(tv)} = 304,65/-10,03^\circ \Omega$$

El televisor y el refrigerador están en paralelo:

$$I_{tv} \cdot Z_{tv} = I_{ref} \cdot Z_{ref}$$

$$I_{tv} \cdot (304,65/-10,03^\circ) = (20,7/26^\circ) \cdot (27,98/26,68^\circ)$$

$$I_{tv} = 1,9/62,71^\circ A$$

La corriente, en términos del tiempo, es:

$$I(t) = 1,9 A \cdot \sin \left(62,71^\circ - 314,16 \left(\frac{t}{s} \right) \right)$$

Para calcular la corriente en el instante pedido, convertimos a radianes:

$$I(t) = 1,9 A \cdot \sin \left(62,71^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) - 314,16 \left(\frac{t}{s} \right) \right)$$

$$I(t = 2s) \approx 1,9 A \cdot \sin(-627,226)$$

$$I(t = 2s) \approx 1,69 A$$

$$I_{(t=2 s)} = \boxed{1,69 A}$$

c) (1 punto) La impedancia total de refrigerador y televisor juntos.

El televisor y el refrigerador están en paralelo:

$$Z_{tv/ref} = \frac{Z_{tv} \cdot Z_{ref}}{Z_{tv} + Z_{ref}}$$

$$Z_{tv/ref} = \frac{(304,65/-10,03^\circ)(27,98/26,68^\circ)}{(304,65/-10,03^\circ) + (27,98/26,68^\circ)}$$

$$Z_{tv/ref} = \frac{8524,11/16,65^\circ}{327,51/-7,10^\circ}$$

$$Z_{tv/ref} = 26,03/23,75^\circ \Omega$$

$$Z_{tv/ref} = \boxed{26,03/23,75^\circ \Omega}$$

d) (1,5 puntos) La impedancia del calefactor.

De la pregunta 1, se tiene que el voltaje de la fuente es:

$$V_{fuente} = 220\sqrt{2}/0,45 \text{ rad}$$

Para el refrigerador:

$$V_{ref} = I_{ref} \cdot Z_{ref}$$

$$V_{ref} = (20,7/26^\circ)(27,98/26,68^\circ)$$

$$V_{ref} = 579,19/52,68^\circ$$

El televisor y el refrigerador están en paralelo:

$$V_{tv} = V_{ref} = V_{tv/ref}$$

Calculamos el voltaje del calefactor:

$$V_{cal} = V_{fuente} - V_{tv/ref}$$

$$V_{cal} = V_{fuente} - V_{ref}$$

$$V_{cal} = 220\sqrt{2}/0,45 \text{ rad} - 579,19/52,68^\circ$$

$$V_{cal} = 220\sqrt{2}/0,45 \frac{180^\circ}{\pi} - 579,19/52,68^\circ$$

$$V_{cal} = 332,95/-102,3^\circ$$

Calculamos la corriente $I_{tv/ref}$, pues esta será la misma corriente I_{cal} que circule por el calefactor:

$$V_{tv/ref} = I_{tv/ref} \cdot Z_{tv/ref}$$

$$579,19/52,68^\circ = I_{tv/ref} \cdot 26,03/23,75^\circ$$

$$I_{tv/ref} = 22,25/28,93^\circ \text{ A}$$

$$I_{cal} = 22,25/28,93^\circ \text{ A}$$

Calculamos la impedancia del calefactor:

$$V_{cal} = I_{cal} \cdot Z_{cal}$$

$$332,95/-102,3^\circ = 22,25/28,93^\circ \cdot Z_{cal}$$

$$Z_{cal} = 14,96/131,24^\circ \Omega$$

$$Z_{calefactor} = \boxed{14,96/131,24^\circ \Omega}$$

Constantes:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{NA}^{-2}$$

Fuerza magnética sobre carga puntual:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Fuerza magnética sobre línea recta conductora de corriente:

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

Flujo magnético:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Para un campo magnético uniforme en superficies planas:

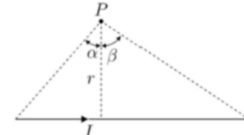
$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \theta$$

Ley de Ohm:

$$V = IR$$

ELEMENTO PASIVO	IMPEDANCIAS FASORES
	$R \rightarrow R \angle 0^\circ$
	$C \rightarrow \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$
	$L \rightarrow \omega L \angle 90^\circ$

Campo magnético producido por un cable finito:



$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

Para un cable recto infinito:

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

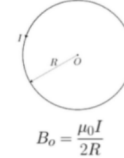
Ley de Faraday:

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Ley de Ohm:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

Campo magnético en el centro de una espira:



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

En el centro de un arco de ángulo θ (en grados sexagesimales):

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{\theta}{360} \right)$$

Relaciones de transformación:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

Valores rms:

$$V_{rms} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

$$I_{rms} = \frac{I_P}{\sqrt{2}}$$

Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Impedancias en serie:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

Impedancias en paralelo:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$