

Apellidos y Nombres:

Instrucciones: Escriba su respuesta dentro de los recuadros, escriba de forma clara y precisa sus dígitos sin salirse de los espacios proporcionados.

1. (10 Puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineal y homogéneo:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

a) Escriba el sistema en forma matricial $\vec{x}' = A\vec{x} : \vec{x}' = \left[\begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \right] \vec{x}$

b) Los eigenvalores son: $\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$

c) Los eigenvectores $v_1 = \boxed{}$ y $v_2 = \boxed{}$

d) Escriba la solución general del sistema:

e) Escriba la solución para $x_1(t)$:

f) Escriba la solución para $x_2(t)$.

Formulario: Autovalores y Autovectores:

a) Cuando la matriz A tiene n eigenvalores **diferentes** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, también tendrá n eigenvectores $K_1, K_2, \dots, K_n$, donde K_i está asociado a λ_i . La solución general es:

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$$

b) Se tienen dos autovalores repetidos λ : Sea K el eigenvector asociado a λ , en este caso la solución general es: $X = c_1 K e^{\lambda t} + c_2 (K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t})$
donde P se obtiene al resolver: $(A - \lambda I_n)P = K$

c) Se tienen eigenvalores complejos: Los eigenvalores **siempre** serán conjugados: $\lambda_1 = \alpha + \beta i \Rightarrow \lambda_2 = \alpha - \beta i$. Si $K_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ es el eigenvector asociado a $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, definimos:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \text{Re}(z_1) \\ \text{Re}(z_2) \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} \text{Im}(z_1) \\ \text{Im}(z_2) \end{bmatrix}$$

Luego, la solución general solo tendrá términos reales y será:

$$c_1 [B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t] e^{\alpha t} + c_2 [B_2 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t] e^{\alpha t}$$

