

Métodos Numéricos

Ecuaciones No Lineales - S3

Jimmy Mendoza Montalvo

(jmendozam@utec.edu.pe)

Rósulo Pérez Cupe

(rperezc@utec.edu.pe)

Marco Antonio Cuyubamba Espinoza

(mcuyubamba@utec.edu.pe)

Patricia Reynoso Quispe

(preynoso@utec.edu.pe)

Roger Ivan Ponce Segovia

(rponce@utec.edu.pe)



Índice

- 1 **Métodos Cerrados**
- 2 **Métodos Abiertos**



Objetivos

- Localizar y delimitar raíces mediante métodos gráficos y analíticos
- Resolver ecuaciones no lineales con Bisección Newton y Punto Fijo
- Determinar convergencia y eficiencia de métodos cerrados y abiertos

1 MÉTODOS CERRADOS



Problema

Dada f una función real con valores reales (es decir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) nos interesa encontrar al menos una raíz de la ecuación:

$$f(x) = 0$$

Es decir, interesa encontrar $\hat{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

En algunos casos, la ecuación se puede resolver de forma analítica y obtener la raíz exacta, pero, **para la gran mayoría de las ecuaciones encontrar raíces es complicado y debe hacerse de manera numérica.**

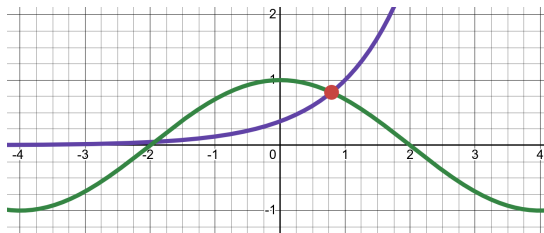
Métodos Gráficos

El método gráfico es útil porque proporciona un valor inicial a ser usado por otros métodos.

Ejemplo

Utilice un argumento geométrico (método gráfico) para garantizar la existencia de una única raíz positiva r de la ecuación

$$e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$$



Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Presenta un cambio de signo en los extremos del intervalo,

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

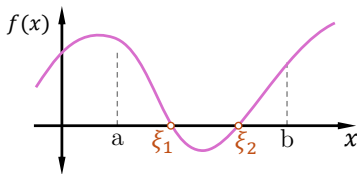
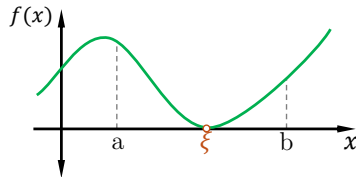
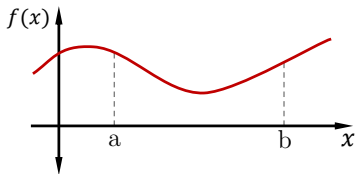
entonces, podemos garantizar que existe **al menos un valor** $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

- La **condición de continuidad es esencial** para garantizar la existencia de una raíz.
- Dentro de ese intervalo la función puede tener más de una raíz.

Continuación...

Observación:

Si $f(a)f(b) > 0$, entonces se puede dar **diversas situaciones** en el intervalo $[a, b]$.



Método de la Bisección

El método de la bisección es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad. Si la función cambia de signo sobre un intervalo, se evalúa la función en el punto medio. La posición de la raíz se determina situándola en el punto medio del subintervalo, dentro del cual ocurre un cambio de signo. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

- 0 Comienza desde un intervalo $[a_0, b_0] = [a, b]$ que contiene la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, por lo que $f(a)f(b) < 0$, f es continua en $[a, b]$.
- 1 Se calcula el valor de la función en el punto medio, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ intervalo $[a_0, b_0]$.
- 2 Si $f(c_0)$ tiene el mismo signo que $f(a_0)$ establecemos $a_1 = c_0$. Pero Si $f(c_0)$ tiene el mismo signo que $f(b_0)$ establecemos $b_1 = c_0$.
- 3 Se realizan, una cantidad de veces, los pasos 1 y 2 con el intervalo $[a_0, b_0] = [a_1, b_1]$.

Método de la Bisección

Algorithm 1: Método de Bisección

Input: a, b tales que $f(a)f(b) < 0$, tolerancia Tol, número máximo de iteraciones N

Output: Aproximación c de la raíz de $f(x) = 0$

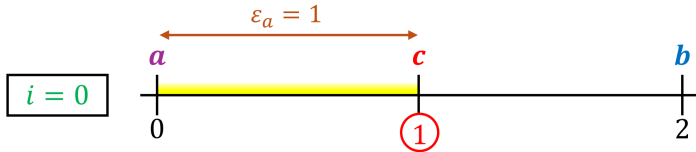
```
1 for  $i \leftarrow 0$  to  $N$  do
2    $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$ 
3   if  $f(c) = 0$  then
4     Terminar
5   if  $f(c)f(a) > 0$  then
6      $a \leftarrow c$ 
7   else
8      $b \leftarrow c$ 
9 return  $c$ 
```

Continuación...



Figure: Una representación gráfica del método de la bisección.

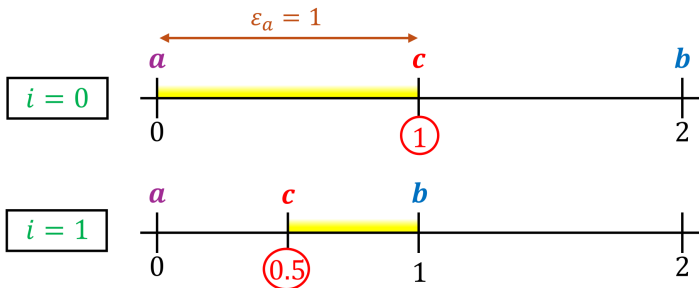
Continuación...



$$\varepsilon_a = 1 = \frac{2 - 0}{2^{0+1}}$$

Figure: Una representación gráfica del método de la bisección.

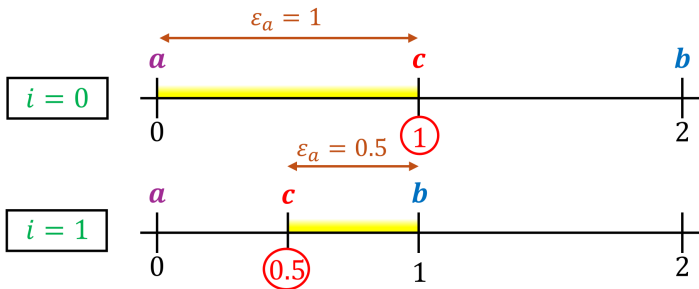
Continuación...



$$\varepsilon_a = 1 = \frac{2 - 0}{2^{0+1}}$$

Figure: Una representación gráfica del método de la bisección.

Continuación...



$$\varepsilon_a = 1 = \frac{2 - 0}{2^{0+1}}$$

$$\varepsilon_a = 0.5 = \frac{2 - 0}{2^{1+1}}$$

Figure: Una representación gráfica del método de la bisección.

Continuación...

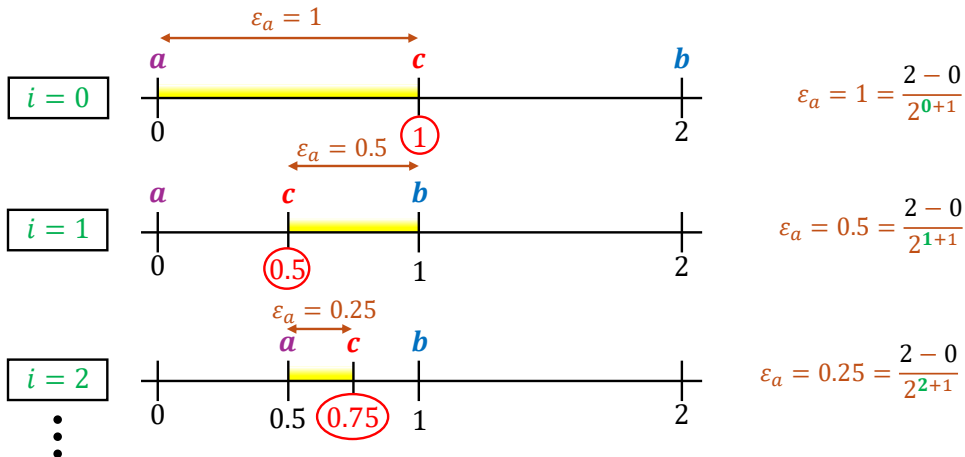


Figure: Una representación gráfica del método de la bisección.

Convergencia de método de bisección

Convergencia

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface:

- 1 f es continua en el intervalo $[a, b]$
- 2 f admite un cambio de signo en el intervalo $[a, b]$

Entonces la sucesión de aproximaciones del método de bisección $\{x_n\}$ converge a alguna raíz $\hat{x} \in [a, b]$ de f .

Resta ver cuál va a ser el **criterio de parada** del algoritmo.

Error y algoritmos iterativos (en general)

En muchas aplicaciones reales, como cuando se emplean algoritmos iterativos, no se conoce a priori la respuesta verdadera.

Error y tolerancia

Sea $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ una sucesión (de aproximaciones) convergente a un valor desconocido. Entonces los *errores absoluto y relativo* al momento de estimar o calcular x_n , están dados por:

$$\xi_n = |\text{aprox. anterior} - \text{aprox. actual}| = |x_n - x_{n-1}| \quad ; \quad \delta_n = \frac{\xi_n}{|x_n|}$$

Además, decimos que se tiene una **tolerancia** de Tol en el *error absoluto (relativo)* cuando:

$$\xi_n \leq \text{Tol} \quad (\delta_n \leq \text{Tol})$$

Mínimo número de iteraciones del M. Bisección

Condición de parada

Si $a = a_0$ y $b = b_0$ son los extremos originales del intervalo donde ocurre un cambio de signo, una estimativa del **error absoluto** (ancho del intervalo) después de n pasos es el valor $\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Fijado una tolerancia Tol en el error absoluto, para saber cuántos pasos hace el algoritmo debemos resolver:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{Tol}.$$

Claramente

$$n = \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{b-a}{2 \times \text{Tol}} \right)}{\ln 2} \right\rceil$$

Ejemplo 1

Ejemplo (EP 2023-2)

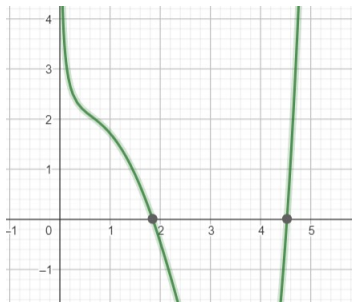
Dada la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{e^x - x^3}{\sqrt{x}} = 0$$

- (a) Elige un intervalo inicial $[a_0, b_0]$, donde se garantice la existencia de la menor raíz real positiva. Donde a_0 y b_0 son enteros, además $b_0 - a_0 = 1$.*
- (b) Determine el mínimo número de iteraciones para aproximar la menor raíz real positiva con una tolerancia de 10^{-3} al aplicar el método de la bisección.*
- (c) Realice dos iteraciones utilizando el método de la bisección con las condiciones encontradas en el ítem (a).*

Ejemplo 1

(a) Se va analizando en intervalos de longitud 1, como en la gráfica:



La función es continua en $[1, 2]$ y $f(1)f(2) < 0$.

(b) De la desigualdad se sigue:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{tol} \rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \rightarrow n = 9$$

Ejemplo 1

(c) Realizamos las iteraciones:

Iter	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Error
0	1		2				
1							
2							

Ejemplo 1

(c) Realizamos las iteraciones:

Iter	a	c	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Error
0	1	1.5	2	1.7183	0.9036	-0.4320	
1	1.5	1.75	2	0.9036	0.2988	-0.4320	0.25
2	1.75	1.875	2	0.2988	-0.0518	-0.4320	0.125

Ejercicio 2

Ejemplo (Examen de Rezagados 2024 - 1)

El flujo de corriente eléctrica en un circuito RLC, para determinados valores de la resistencia R , la inductancia L y la capacitancia C , viene dado por la expresión:

$$i(t) = 10e^{-t/2} \cos(3t) \text{ (miliamperios)}$$

Estime el primer instante cuando la corriente alcanza el valor de 2 miliamperios. Use el método de la bisección, considere el intervalo inicial $[0; 0.5]$ seg y realice 2 iteraciones

2 MÉTODOS ABIERTOS



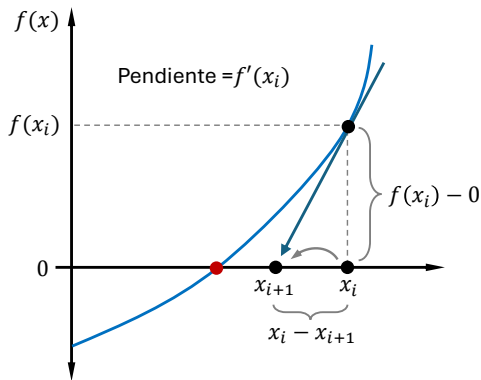
Introducción

Los métodos abiertos se basan en fórmulas que **requieren únicamente de un solo valor de inicio x_0 o que empiecen con un par de ellos**, pero que no necesariamente encierran la raíz. A partir del punto inicial o puntos iniciales, generan sucesiones aproximadas de la solución mediante una formula de iteración. Su convergencia depende del punto inicial y la naturaleza de la función f . Sin embargo, cuando convergan lo hacen mucho más rapido que los métodos cerrados.

Método de Newton

De las fórmulas para localizar raíces, la fórmula de Newton-Raphson es una de las más utilizadas. Si el valor inicial para la raíz es x_i , entonces se puede trazar una tangente desde el punto $(x_i; f(x_i))$. El punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

Interpretación Geométrica



La ecuación de la recta tangente es:

$$f(x_i) - y = f'(x_i)(x_i - x)$$

Cuando $y = 0$, $x = x_{i+1}$, reemplazando:

$$f(x_i) - 0 = f'(x_i)(x_i - x_{i+1})$$

Despejando:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Observación: El método no funciona si $f'(x_i) = 0$.

Método de Newton

Algorithm 2: Método de Newton

Input: Función $f(x)$, punto inicial x_0 , tolerancia en error relativo δ_r

Output: Aproximación a x^* , raíz de f , es decir $f(x^*) = 0$

```
1  $k \leftarrow 0$ 
2  $\delta_r \leftarrow 1$  (valor mayor a Tol)
3 Obtener expresión  $f'(x)$ 
4 while  $\delta_r > Tol$  do
5   if  $f'(x_k) = 0$  then
6     Terminar con error
7    $x_{k+1} \leftarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 
8    $\delta_r \leftarrow \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$ 
9    $k \leftarrow k + 1$ 
10 return  $x_{k+1}$ 
```

Ejemplo

Ejemplo

Aproximar una raíz de la función $f(x) = e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ utilizando el método de Newton con $x_0 = 0.1$. Realice 04 iteraciones. Calcule el error (relativo).

Solución: Tenemos $x_0 = 0.1$, $f'(x) = e^{x-1} + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	Error relativo
0	0.1			
1				
2				
3				
4				

Ejemplo

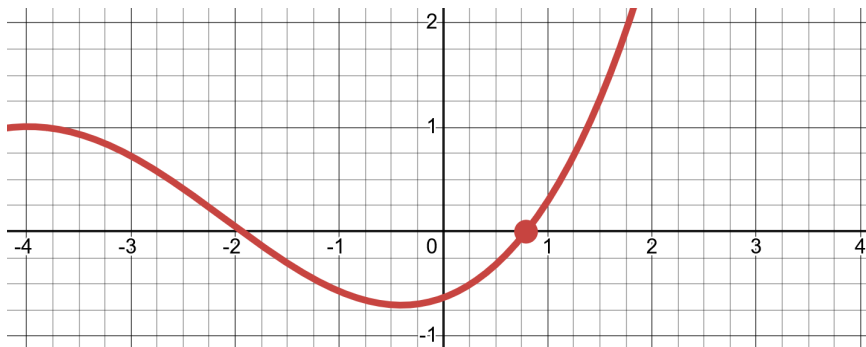
Ejemplo

Aproximar una raíz de la función $f(x) = e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, utilizando el método del Newton con $x_0 = 1.5$. Realice 04 iteraciones. Calcule el error (relativo).

Solución: Tenemos $x_0 = 0.1$, $f'(x) = e^{x-1} + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	Error relativo
0	0.1000	-0.5903	0.4682	-
1	1.3609	0.9535	2.1232	0.9265
2	0.9118	0.1612	1.4312	0.4925
3	0.7991	0.0086	1.2793	0.1410
4	0.7924	0.00003	1.2704	0.0085

Continuación



La gráfica nos muestra una aproximación al valor de la raíz de la ecuación $f(x) = e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ pero el método de Newton nos da un valor específico.

Convergencia de método de Newton

Convergencia

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface:

- 1 Existe una raíz x^* de f en el intervalo $[a, b]$
- 2 $f'(x) \neq 0$ en todo un intervalo $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ para algún $\delta > 0$
- 3 $f''(x)$ es continua en I
- 4 x_0 es suficientemente cercano a x^* , $x_0 \in I$

Entonces, la sucesión de aproximaciones de Newton $\{x_k\}$ converge a x^* .
Además, si se cumple

$$M \cdot \delta < 1 \text{ con } M = \max_{x \in I} \frac{|f''(x)|}{2|f'(x)|},$$

se tiene que

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M|x_k - x^*|^2;$$

es decir, el método de Newton converge cuadráticamente.

Punto Fijo

Definición

Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, se dice que $p \in [a, b]$ es punto fijo de g si y solo si se cumple: $g(p) = p$

Ejemplo: Halle los puntos fijos de las siguientes funciones, en caso existan

1 $g(x) = 20 - x^2$

2 $g(x) = x^3 - e^x$

3 $g(x) = -1 - x^2$

Notas:

- Hallar punto fijo de g equivale a resolver $g(x) = x$
- Considerando $f(x) = g(x) - x$ o $f(x) = x - g(x)$, hallar puntos fijos de g es equivalente a hallar raíces de f

Método del Punto Fijo

Un **punto fijo** de una función g es una solución x^* de la siguiente ecuación

$$g(x^*) = x^*$$

Geométricamente, es la intersección de la función $y = g(x)$ con la función $y = x$. Para resolver una ecuación $f(x) = 0$, se reescribe en la forma:

$$x = g(x)$$

La elección de $g(x)$ no es única. Algunas formas acercan x a la solución, otras lo alejan.

Método del Punto Fijo

Algorithm 3: Método del Punto Fijo

Input: Función $g(x)$, punto inicial x_0 , tolerancia en error relativo δ_r

Output: Aproximación x de la raíz de $f(x) = 0$

```
1  $k \leftarrow 0$ 
2  $\delta_r \leftarrow 1$  (valor mayor a Tol)
3 while  $\delta_r > Tol$  do
4    $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$ 
5    $\delta_r \leftarrow \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$ 
6    $k \leftarrow k + 1$ 
7 return  $x_{k+1}$ 
```

Método del Punto Fijo

Ejemplo

Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. Expresar la ecuación en la forma $x = g(x)$

Solución:

a) $x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

b) $x = g(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

Continuación...

Ahora vamos a usar el proceso iterativo $x_{(n+1)} = g(x_{(n)})$; $n = 0, 1, 2, \dots$ para los dos despejes, tomando como semilla $x^{(0)} = 1.8$.

Iteración	$x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$	$x = g(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$
0	1.8	1.8
1	-6.992	
2	149.281087	
3	-3415685.7	
4		
5		
6		
7		

Continuación...

Ahora vamos a usar el proceso iterativo $x_{(n+1)} = g(x_{(n)})$; $n = 0, 1, 2, \dots$ para los dos despejes, tomando como semilla $x^{(0)} = 1.8$.

Iteración	$x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$	$x = g(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$
0	1.8	1.8
1	-6.992	1.313064329
2	149.281087	1.371915816
3	-3415685.7	1.364380177
4		1.36533815
5		1.365216255
6		1.365231764
7		1.365229791

Convergencia de método del punto fijo

Convergencia

Sean $[a, b]$ un intervalo si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$ tal que:

- 1 Para cualquier punto x en $[a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$ (**condición de existencia**).
- 2 Se cumple $|g'(x)| < 1$ para cualquier $x \in \langle a, b \rangle$ (**condición de contracción**).

Entonces existe un único punto $p \in \langle a, b \rangle$ tal que $g(p) = p$. Además, si $x_{(0)}$ es algún punto del intervalo $[a, b]$, y la sucesión $\{x_{(k)}\}$ se construye de manera recursiva

$$x_{(k+1)} = g(x_{(k)})$$

entonces la sucesión $\{x_{(k)}\}$ converge al punto fijo p de la función g .

Representación gráfica

En 1a) y 1b) el método del punto fijo converge, tienen un comportamiento monótono.

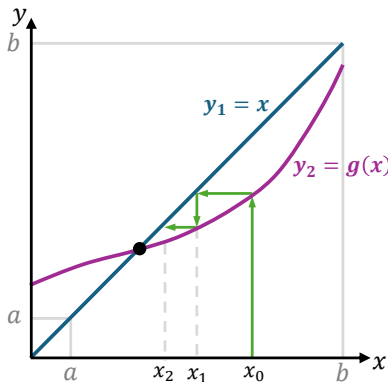


Figura 1a

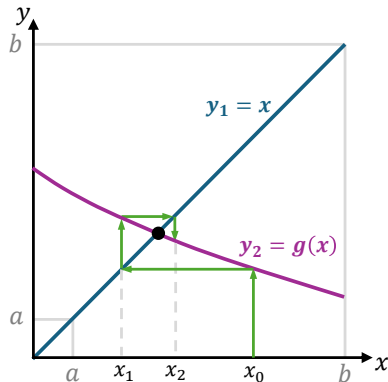


Figura 1b

Representación gráfica

En 1c) y 1d) el método de punto fijo diverge, tienen un comportamiento oscilatorio o en espiral.

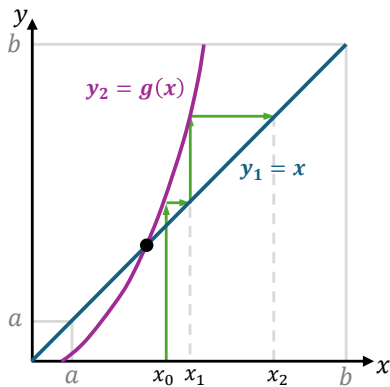


Figura 1c

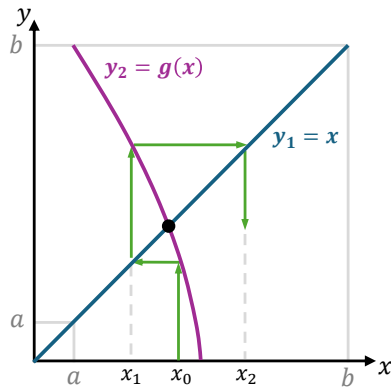


Figura 1d

Ejemplo

Ejemplo

La ecuación $x^2 - x = 0$, tiene en el intervalo $[0.64; 1.44]$ una única raíz α .

- Verificar que α es un punto fijo de la función $g(x) = \sqrt{x}$.
- Pruebe que la sucesión $\{x^{(n)}\}$ definida por

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0.64 \\ x^{(n+1)} = \sqrt{x^{(n)}}, \end{cases} \quad n \geq 0$$

Converge a α

Solución:

- Como α es raíz de la ecuación $x^2 - x = 0$ entonces $\alpha^2 - \alpha = 0$
De este modo:

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\alpha} = g(\alpha)$$

Por lo tanto α es punto fijo de la función $g(x) = \sqrt{x}$.

- Es necesario verificar que la función $g(x) = \sqrt{x}$ satisface en el intervalo $[0.64; 1.44]$ las condiciones del teorema del punto fijo. Se tiene $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y se observa que g' es una función positiva y decreciente, por eso es fácil calcular el máximo de su valor absoluto:

$$k = \max_{x \in [0.64; 1.44]} |g'(x)| = g'(0.64) = \frac{1}{2 \times 0.8} = 0.625 < 1$$

Luego hay que demostrar que $g([0.64; 1.44]) \subset [0.64; 1.44]$. Calculemos los valores mínimo y máximo de g en el intervalo $[0.64; 1.44]$. Dado que $g' > 0$, la función g es creciente:

$$\min_{x \in [0.64; 1.44]} g(x) = g(0.64) = 0.8$$

$$\max_{x \in [0.64; 1.44]} g(x) = g(1.44) = 1.2$$

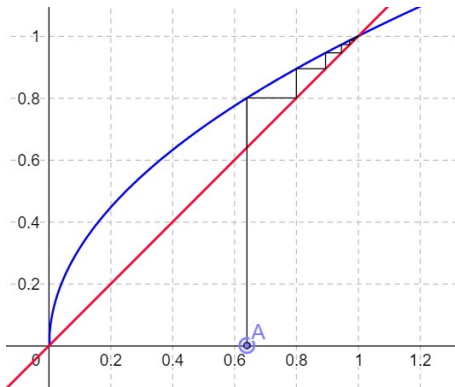
$$g([0.64; 1.44]) = [g(0.64), g(1.44)] = [0.8; 1.2]$$

Así que:

$$[0.8; 1.2] \subset [0.64; 1.44]$$

Por lo tanto, g tiene un único punto fijo en este intervalo.

Comprobación gráfica



Comprobación de la convergencia del método del punto fijo en el intervalo $[0.64; 1.44]$ con $x^{(0)} = 0.64$.

Ejercicio 3

Ejemplo (Examen parcial 2023 - 2)

Determine la veracidad de la siguiente proposición:

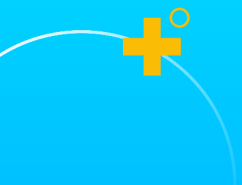
Sea: $f(x) = e^x - x(e - 1) - 1$ y $x = g(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$. Para cualquier punto x en $[-1, 1]$ se cumple que $g(x) \in [-1, 1]$. Por ello, esta garantizada la convergencia del método de punto fijo en la determinación de la raíz real de la ecuación.

Conclusiones

- Los métodos abiertos, aunque más rápidos, son menos estables que los métodos cerrados, los cuales ofrecen mayor seguridad en la convergencia.
- La convergencia de los métodos numéricos, en particular los métodos abiertos, depende en gran medida de la elección adecuada del valor inicial.
- La precisión en la resolución numérica es crucial, y un control adecuado de la tolerancia y el error garantiza resultados más fiables en aplicaciones prácticas.

Bibliografía

-  **Steven C. Chapra and Raymond P. Canale**
Métodos numéricos para ingenieros, 7a ed.
-  **Richard L. Burden and J. Douglas Faires**
Análisis numérico, 7a ed.



UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

