

Código de alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Sección:

--	--

Indicaciones

1. Escribir *claramente* su **código de alumno** dentro del recuadro de arriba.
2. En la última página tienen un formulario.
3. Cada pregunta tiene un **espacio designado para su resolución**. *No se calificarán respuestas con exceso de desorden o escritas fuera de dicho espacio.*
4. **NO DESGLOSAR** las hojas del examen.
5. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora científica (no programable ni graficadora).
6. Resolver el examen con **lapicero azul o negro**. Si resuelve con lápiz pierde derecho a reclamo. En caso escriba con lápiz *presionar con fuerza* para que se note en el escaneo.
7. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

Problema 1 (5 puntos)

Una empresa farmacéutica realiza un proceso de purificación líquida utilizando dos tanques conectados en serie. Cada tanque tiene capacidad constante de 120 litros y el sistema opera de manera continua bajo agitación perfecta. Al primer tanque ingresa una solución medicinal con una concentración de 3 g/L a razón de 4 L/min. El contenido del primer tanque pasa directamente al segundo tanque con el mismo caudal, mientras que el segundo tanque descarga la mezcla al exterior a razón de 4 L/min. Inicialmente, el primer tanque contiene 15 gramos de sustancia activa disuelta, mientras que el segundo tanque contiene 40 gramos. Si $x(t)$ y $y(t)$ representan la cantidad de sustancia activa (en gramos) presente en el primer y segundo tanque, respectivamente:

1.1) **(2.5 ptos)** Formule el modelo matemático que describe el comportamiento del sistema e indique las condiciones iniciales correspondientes.

Solución P1.1

Condiciones iniciales: Según el enunciado, el primer tanque contiene inicialmente 15 g y el segundo 40 g:

$$x(0) = 15, \quad y(0) = 40 \quad (1)$$

Modelo Matemático Final:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{30} = 12 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{y}{30} = \frac{x}{30} \end{cases} \quad \text{con } x(0) = 15, \quad y(0) = 40$$

1.2) **(2.5 pts)** Resuelva el siguiente problema de valor inicial asociado a un proceso de mezcla similar al del ítem (1.1):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{10+t}x = e^{-t/20}, \quad x(0) = 25.$$

Solución P1.2

Calculamos el factor integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{1}{10+t}dt} = e^{\ln(10+t)} = 10+t$$

2. Multiplicación e Integración

Multiplicamos toda la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(t) = 10+t$:

$$(10+t) \left[\frac{dx}{dt} + \frac{1}{10+t}x \right] = (10+t)e^{-t/20}$$

$$\frac{d}{dt}[(10+t)x] = (10+t)e^{-t/20}$$

Integramos ambos lados respecto a t :

$$(10+t)x = \int (10+t)e^{-t/20} dt$$

Resolvemos la integral del lado derecho utilizando el método de integración por partes:

- Sea $u = 10+t \implies du = dt$
- Sea $dv = e^{-t/20}dt \implies v = -20e^{-t/20}$

Aplicando $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\begin{aligned} \int (10+t)e^{-t/20} dt &= -20(10+t)e^{-t/20} - \int -20e^{-t/20} dt \\ &= -20(10+t)e^{-t/20} + 20 \int e^{-t/20} dt \\ &= -20(10+t)e^{-t/20} - 400e^{-t/20} + C \end{aligned}$$

3. Obtención de la Solución General

Sustituimos el resultado de la integral y despejamos $x(t)$:

$$\begin{aligned} (10+t)x &= e^{-t/20}[-20(10+t) - 400] + C \\ x(t) &= -20e^{-t/20} - \frac{400e^{-t/20}}{10+t} + \frac{C}{10+t} \end{aligned}$$

4. Aplicación de la Condición Inicial

Utilizamos la condición inicial $x(0) = 25$ para determinar la constante C [1]:

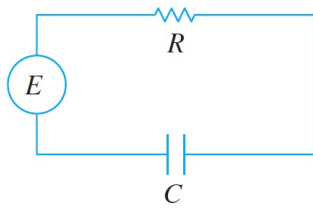
$$\begin{aligned} 25 &= -20e^0 - \frac{400e^0}{10+0} + \frac{C}{10+0} \\ 25 &= -20 - 40 + \frac{C}{10} \end{aligned}$$

$$25 = -60 + \frac{C}{10} \implies 85 = \frac{C}{10} \implies C = 850$$

Solución Final: La expresión que rige la cantidad de sustancia en el tiempo t es:

$$x(t) = -20e^{-t/20} - \frac{400e^{-t/20}}{10 + t} + \frac{850}{10 + t}$$

Problema 2 (5 puntos)



2.1) (2 pts) Se tiene un circuito RC como se muestra en la figura, donde $R = 60 \, \Omega$, $C = \frac{1}{50} \, F$ y $E = 200 \sin(3t) \, V$. Determine y escriba dentro del recuadro la ecuación diferencial que permita encontrar la carga $q(t)$ en el circuito. [No resolver, solo plantear. Escribir la ecuación con constantes numéricas calculadas.]

2.2) (3 pts) Usando el **método del factor integrante** resuelva el problema de valor inicial:

$$400 \frac{dq}{dt} + 25q = \frac{t}{5}, \quad q(0) = 0.$$

Solución P2.1

Para un circuito RC en serie, la suma de las caídas de tensión en la resistencia (V_R) y el condensador (V_C) es igual al voltaje suministrado por la fuente (E). Según las leyes de Kirchhoff y las relaciones fundamentales:

- Caída en la resistencia: $V_R = R \cdot I = R \frac{dq}{dt}$
- Caída en el condensador: $V_C = \frac{q}{C}$
- Fuente de voltaje: $E(t) = 200 \sin(3t)$

Sustituyendo los valores dados ($R = 60 \, \Omega$, $C = \frac{1}{50} \, F$):

$$60 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{1/50} = 200 \sin(3t) \quad (2)$$

Simplificando, obtenemos la **ecuación diferencial para la carga $q(t)$** :

$$60 \frac{dq}{dt} + 50q = 200 \sin(3t)$$

Solución P2.2

Se nos pide resolver:

$$400 \frac{dq}{dt} + 25q = \frac{t}{5}, \quad q(0) = 0$$

1. **Llevamos la EDO a su forma estándar:** Dividimos toda la ecuación por 400:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} + \frac{25}{400}q &= \frac{t}{5 \cdot 400} \\ \frac{dq}{dt} + \frac{1}{16}q &= \frac{t}{2000} \end{aligned}$$

Donde $P(t) = \frac{1}{16}$ y $Q(t) = \frac{t}{2000}$.

2. Hallamos el factor integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{1}{16}dt} = e^{t/16}$$

3. Multiplicamos la EDO por $\mu(t)$ e integramos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[e^{t/16}q] &= \frac{t}{2000}e^{t/16} \\ e^{t/16}q &= \int \frac{t}{2000}e^{t/16}dt = \frac{1}{2000} \int te^{t/16}dt\end{aligned}$$

Resolvemos $\int te^{t/16}dt$ por partes ($u = t, dv = e^{t/16}dt$):

$$\int te^{t/16}dt = 16te^{t/16} - \int 16e^{t/16}dt = 16te^{t/16} - 256e^{t/16}$$

Sustituyendo en la expresión de q :

$$\begin{aligned}e^{t/16}q &= \frac{1}{2000}[16te^{t/16} - 256e^{t/16}] + C \\ q(t) &= \frac{16t}{2000} - \frac{256}{2000} + Ce^{-t/16} \\ q(t) &= \frac{t}{125} - \frac{16}{125} + Ce^{-t/16}\end{aligned}$$

4. Aplicamos la condición inicial $q(0) = 0$:

$$0 = \frac{0}{125} - \frac{16}{125} + Ce^0 \implies C = \frac{16}{125}$$

Solución particular final:

$$q(t) = \frac{t}{125} - \frac{16}{125} + \frac{16}{125}e^{-t/16}$$

O equivalentemente:

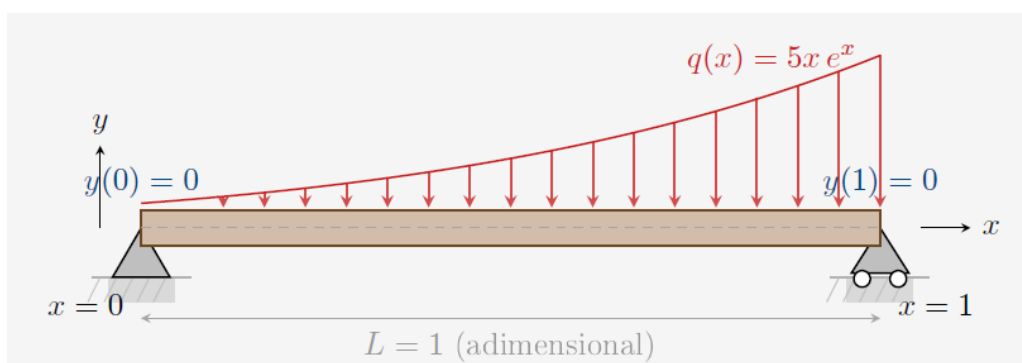
$$\mathbf{q(t) = \frac{1}{125} \left(t - 16 + 16e^{-t/16} \right)}$$

Problema 3: Deflexión de Viga con Carga Exponencial (5 puntos)

En la figura se muestra una viga prismática de longitud L (adimensionalizada a $L = 1$) la cual está simplemente apoyada en ambos extremos.

La viga se encuentra sometida a una **carga distribuida transversal no uniforme** cuya intensidad varía a lo largo del eje según $q(x) = 5xe^x$ (en unidades adimensionales). Se ha establecido que la deflexión vertical $y(x)$ satisface la ecuación diferencial adimensionalizada:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 5xe^x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$



- 3.1) (1 ptos) Resuelva la parte homogénea de la ecuación diferencial.
- 3.2) (1 ptos) Explique por qué la forma inicial $y_p = (Ax + B)e^x$ que se propone al usar el método de coeficientes indeterminados **no puede** ser solución particular de la ecuación completa.
- 3.3) (1 ptos) Indique cual debe ser la forma de la solución particular. [Solo proponga la forma. Todavía no halle los coeficientes.]

Solución P3.123

3.1) Parte Homogénea: Consideramos la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$. Su ecuación auxiliar asociada es:

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \implies (m - 1)^2 = 0$$

Obtenemos una raíz real repetida $m = 1$ con multiplicidad 2. La solución complementaria (o homogénea) es:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

3.2) Explicación sobre la propuesta $y_p = (Ax + B)e^x$: Al usar el método de coeficientes indeterminados, se propone una solución particular con la misma forma que el término no homogéneo $g(x) = 5xe^x$. La forma inicial sería $y_p = (Ax + B)e^x = Ae^x + Bxe^x$.

Sin embargo, esta forma **no puede ser solución particular** porque ambos términos (e^x y xe^x) ya forman parte de la base de soluciones de la ecuación homogénea (y_h). Si se sustituyen en el operador diferencial $L = D^2 - 2D + 1$, el resultado será idénticamente cero, por lo que nunca podrían igualar al término $5xe^x$.

3.3) Forma de la solución particular (1 pto)

Debido a que la raíz $m = 1$ tiene multiplicidad 2 en la parte homogénea, debemos multiplicar la forma inicial por x^2 para asegurar la independencia lineal. La forma correcta de la solución particular es:

$$y_p(x) = x^2(Ax + B)e^x$$

$$y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^x$$

3.4) (2 ptos) Encuentre la solución particular. (Usar el **método de coeficientes indeterminados por superposición**)

Solución P3.4

Utilizamos el método de coeficientes indeterminados. Derivamos $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^x$:

- $y'_p = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]e^x$
- $y''_p = [3Ax^2 + 2(3A + B)x + 2B]e^x + [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]e^x$
- $y''_p = [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]e^x$

Sustituimos en la EDO original $y'' - 2y' + y = 5xe^x$:

$$\begin{aligned} &e^x[Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B] \\ &\quad - 2e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx] \\ &\quad + e^x[Ax^3 + Bx^2] = 5xe^x \end{aligned}$$

Agrupamos los términos según las potencias de x :

- Coeficiente de x^3e^x : $A - 2A + A = 0$ (se anula, correcto).
- Coeficiente de x^2e^x : $(6A + B) - 2(3A + B) + B = 6A + B - 6A - 2B + B = 0$ (se anula, correcto).
- Coeficiente de xe^x : $(6A + 4B) - 2(2B) = 6A + 4B - 4B = 6A$.
- Coeficiente de e^x : $2B$.

Igualamos con el término de la derecha ($5xe^x$):

$$\begin{aligned} 6A = 5 &\implies A = \frac{5}{6} \\ 2B = 0 &\implies B = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la **solución particular** es:

$$y_p(x) = \frac{5}{6}x^3e^x$$

Problema 4 (5 puntos)

Un grupo de estudiantes usa un sistema masa-resorte para modelar el comportamiento de un pequeño recogedor de desechos sujeto al rozamiento con la plataforma de caucho sobre la que se mueve. Además, a fin de realizar una tarea específica durante un lapso, incorporan una fuerza externa.

La 2da Ley de Newton nos dice que

$$\frac{d}{dt}p(t) = -kx(t) - \beta v(t) + F_{\text{ext}}(t), \quad (3)$$

donde p es la cantidad de movimiento, k es la constante elástica del resorte, $\beta = \beta(t)$ es la constante de fricción, la cual puede variar según cómo se vaya deformando la superficie de la plataforma sobre la que se mueve el recogedor, y $F_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}(t)$ es la fuerza de refuerzo externa.

Aquí $p = mv$, con $m = m(t)$, ya que la masa oscilante va aumentando mientras el sistema recoge material, y $v = \dot{x}(t)$, obtenemos:

$$m\ddot{x} + (\beta + \dot{m})\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}, \quad (4)$$

donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Para el análisis, se consideran las siguientes funciones:

$$m(t) = 4t^2, \quad \beta(t) = t, \quad k = 10. \quad (5)$$

Por otro lado, a fin de mitigar la fuerza neta proporcional a la velocidad, el grupo modela la fuerza externa variable

$$F_{\text{ext}}(t) = 9tv + 9\sqrt{t} \quad (6)$$

4.1) (2.0 puntos) Reemplaza las funciones en la Ecuación 5 y la Ecuación 6 en la Ecuación 4. Identifica el tipo de EDO resultante y obtén su **solución complementaria**. Detalla el método utilizado.

Solución P4.1

Encontrando la EDO

Sustituyendo los datos del problema en la ecuación general:

$$4t^2\ddot{x} + (t + 8t)\dot{x} + 10x = 9t\dot{x} + 9t^{1/2}$$

$$4t^2\ddot{x} + 9t\dot{x} + 10x = 9t\dot{x} + 9t^{1/2}$$

Simplificando los términos $9t\dot{x}$, obtenemos la EDO:

$$4t^2\ddot{x} + 10x = 9t^{1/2} \quad (7)$$

Solución Homogénea (x_c): La ecuación homogénea asociada es $4t^2\ddot{x} + 10x = 0$. Esta es una ecuación de **Cauchy-Euler** con $a = 4, b = 0, c = 10$. La ecuación auxiliar es:

$$am^2 + (b - a)m + c = 0 \implies 4m^2 + (0 - 4)m + 10 = 0$$

$$4m^2 - 4m + 10 = 0 \implies 2m^2 - 2m + 5 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática [4]:

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Como las raíces son complejas ($\alpha = 1/2, \beta = 3/2$), la solución complementaria es:

$$x_c(t) = t^{1/2}[c_1 \cos(\frac{3}{2} \ln t) + c_2 \sin(\frac{3}{2} \ln t)]$$

4.2) (3.0 puntos) Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + y = \sec(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Solución P4.2

1. Solución Homogénea (y_h)

Las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y'' + y = 0$ son $y_1(x) = \cos(x)$ y $y_2(x) = \sin(x)$. Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

2. Cálculo del Wronskiano (W)

Calculamos el determinante de la matriz formada por y_1 y y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

3. Determinación de la Solución Particular (y_p)

Planteamos $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$. Las funciones u_1 y u_2 se obtienen mediante las fórmulas:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} dx, \quad u_2 = \int \frac{W_2}{W} dx$$

Donde:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \sec(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -\sin(x) \sec(x) = -\tan(x)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \sec(x) \end{vmatrix} = \cos(x) \sec(x) = 1$$

Procedemos a integrar:

$$u_1(x) = \int -\tan(x) dx = \ln |\cos(x)|$$

$$u_2(x) = \int 1 dx = x$$

La solución particular es:

$$y_p(x) = \cos(x) \ln |\cos(x)| + x \sin(x)$$

4. Solución General

La solución general de la EDO es la suma de la homogénea y la particular:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \cos(x) \ln |\cos(x)| + x \sin(x)$$

5. Aplicación de Condiciones Iniciales

Usamos $y(0) = 1$:

$$y(0) = c_1(1) + c_2(0) + (1) \ln(1) + (0)(0) = c_1 \implies c_1 = 1$$

Calculamos la derivada $y'(x)$:

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) - \sin(x) \ln |\cos(x)| + \cos(x) \left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \right) + \sin(x) + x \cos(x)$$

Simplificando los términos trigonométricos $(-\sin x + \sin x)$:

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) - \sin(x) \ln |\cos(x)| + x \cos(x)$$

Usamos $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -c_1(0) + c_2(1) - (0) \ln(1) + (0)(1) = c_2 \implies c_2 = 2$$

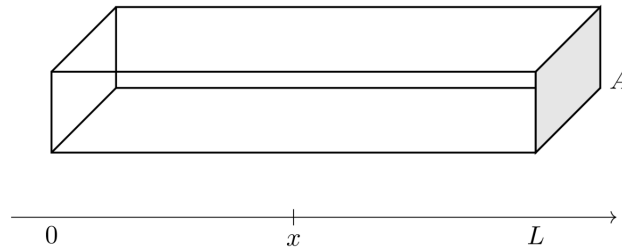
6. Respuesta Final

La solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = \cos(x) + 2 \sin(x) + \cos(x) \ln(\cos(x)) + x \sin(x)$$

(Válida para el intervalo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ donde $\sec(x)$ está definida).

Adicional (3 puntos)



Considere una barra de cobre de longitud L y sea la variable x que mide la posición de un punto sobre la barra. Sea $u(x, t)$ la temperatura de la barra en el punto x al tiempo t , y asumimos que u cumple la **ecuación del calor**:

$$u_t = \alpha u_{xx} \quad (8)$$

Responder a las siguientes preguntas *concisamente* y dentro de los recuadros correspondientes:

Ad.1) **(1 pts)** En sus propias palabras compare y discuta la ley de enfriamiento de Newton con la ecuación del calor.

Ad.2) **(1 pts)** Compare qué ocurre con una barra hecha de un material con difusividad térmica α alta versus un material con difusividad térmica α baja.

Ad.3) **(1 pts)** Describa al detalle ¿qué ocurrió con el logo de UTEC en la animación del mapa de calor de una placa?

Borradores: Puede usar esta página como borradores. *Nada de lo que sea escrito aquí será considerado para la calificación de su examen.*

Formulario

1. Las raíces de la ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Modelo de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

3. Mezclas

$$\frac{dA}{dt} = \left(\text{Razón de entrada} \right) - \left(\text{Razón de salida} \right)$$

4. ED lineal de 1er orden

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) \\ \implies \mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ y &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x) dx \end{aligned}$$

5. Tiempo de vaciado

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_0}{A_h} \sqrt{2gh}$$

6. Caídas de voltaje

- Para una resistencia: $V = RI$
- Para una bobina: $V = L \frac{dI}{dt}$
- Para un condensador: $V = \frac{Q}{C}$
- En general: $I = \frac{dQ}{dt}$

7. Variación de parámetros Para la EDO en forma estándar:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x) \\ \implies y_p &= u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \\ u'_1 &= \frac{W_1}{W}, \quad u'_2 = \frac{W_2}{W} \\ W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix} \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

9. Ecuación de Cauchy-Euler

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Ecuación auxiliar: $am^2 + (b-a)m + c = 0$

■ Caso 1: Raíces reales y diferentes:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

■ Caso 2: Raíces reales y repetidas:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln(x)$$

■ Caso 3: Raíces complejas conjugadas. $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$,

$$y = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x))$$

10. Coeficientes indeterminadas

$g(x)$	$y_p(x)$
1 (cualquier constante)	A
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$\sin(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
$\cos(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
e^{5x}	Ae^{5x}
$x^2 e^{7x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{7x}$
$e^{3x} \sin(8x)$	$Ae^{3x} \sin(8x) + Be^{3x} \cos(8x)$

11. Operador anulador

- D^n anula a las funciones: $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}$
- $(D - \alpha)^n$ anula a las funciones: $\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, x^3 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}\}$.
- $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula a las funciones:

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}.$$