

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 puntos)

- a) (3 puntos) En un tanque se tiene una mezcla salina, inicialmente con 8L y con una concentración de 0.5g/L. Se agrega una mezcla del mismo tipo a una velocidad de 3L/hora con 5g/L, la mezcla en el tanque se mantiene bien batida y sale del tanque a una velocidad de 1L/hora.

Plantear la ecuación diferencial para la sal e indicar la condición inicial.

Observación: $Concentración = \frac{masa}{volumen}$

- b) (3 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(t+2)x' = t^4 - x$$

Solución:

- a) $S(t)$: cantidad de sal en el tanque luego de t horas.

$$S(0) = 0.5 \times 8 \text{ g} = 4 \text{ g.}$$

Volumen de la mezcla luego de t horas: $8 + 3t - t$ litros = $8 + 2t$ litros.

Razón de entrada de sal: $3 \times 5 = 15$.

Razón de salida de sal: $1 \times \frac{S(t)}{8+2t}$.

Por lo tanto,

$$\frac{dS}{dt}(t) = 15 - \frac{S(t)}{8+2t}, \quad S(0) = 4$$

- b) La ecuación diferencial es equivalente a

$$[(t+2)x]' = t^4$$

Por lo tanto,

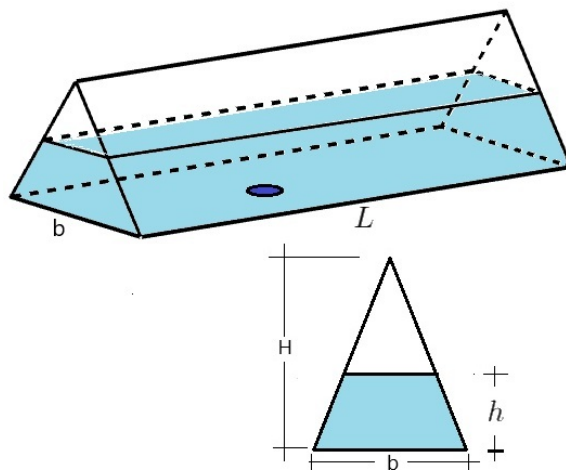
$$x = \frac{t^5 + C}{5(t+2)}$$

donde C es constante.

Problema 2 (6 puntos)

- a) (3 puntos) Se tiene una tanque en forma de prisma triangular, como se muestra la figura, que inicialmente estaba lleno, con una altura $H = 8$ m, con un largo $L = 12$ m, de ancho $b = 4$ m, el triángulo de la figura es isósceles. Se libera la tapa de la base, dejando escapar el agua, si el área del orificio $A_0 = \frac{0.2}{\sqrt{2g}} [m^2]$, g es la gravedad $[m/s^2]$, $c = 1$.

Determinar la ecuación diferencial que modela a la altura h del agua en el vaciado del agua, indicando la condición inicial.



- b) (3 puntos) Determine si la siguiente ecuación diferencial es exacta. Si es exacta, resuélvala:

$$(2xy + 3x)dx + (x^2 - y)dy = 0$$

Solución:

- a) La superficie libre del líquido a una altura h tiene área igual a $bL \left(\frac{H-h}{H}\right)$.
Luego, la ecuación diferencial para $h(t)$ es

$$h' = -\frac{\frac{0.2}{\sqrt{2g}}}{\frac{48(8-h)}{8}} \sqrt{2gh} = -\frac{\sqrt{h}}{30(8-h)}, \quad h(0) = 8$$

- b) Si $M(x, y) = 2xy + 3x$ y $N(x, y) = x^2 - y$, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 2x$$

La ecuación diferencial es exacta. Si $F(x, y)$ es la función potencial, entonces

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = x^2y + \frac{3x^2}{2} + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^2 + g'(y) = x^2 - y$$

$$F(x, y) = x^2y + \frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

Por lo tanto, la solución es

$$x^2y + \frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c$$

Problema 3 (8 puntos)

- a) (2 puntos) Dadas las funciones fundamentales de una ecuación diferencial de segundo orden: $\{e^{2x} \cos(3x), e^{2x} \sin(3x)\}$.

Determine si son linealmente independientes.

- b) (3 puntos) **Usando operadores**, determine la forma de la solución particular de la ecuación diferencial:

$$(D + 2)(D - 1)y = x^2 e^{-x}$$

Observación: $D = \frac{d}{dx}$

- c) (3 puntos) Resuelva la siguiente **ecuación de Cauchy-Euler**:

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

Solución:

- a) $y_1(x) = e^{2x} \cos(3x) \rightarrow y_1'(x) = e^{2x}(2 \cos(3x) - 3 \sin(3x))$.
 $y_2(x) = e^{2x} \sin(3x) \rightarrow y_2'(x) = e^{2x}(2 \sin(3x) + 3 \cos(3x))$.

Luego,

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} \cos(3x) & e^{2x} \sin(3x) \\ e^{2x}(2 \cos(3x) - 3 \sin(3x)) & e^{2x}(2 \sin(3x) + 3 \cos(3x)) \end{vmatrix} = 3e^{4x} \neq 0$$

Por lo tanto, $\{e^{2x} \cos(3x), e^{2x} \sin(3x)\}$ es linealmente independiente.

- b) Las soluciones de la ecuación homogénea asociada es $c_1 e^x + c_2^{-2x}$.

Se sabe que $(D + 1)^3(x^2 e^{-x}) = 0$, entonces una solución particular de la ecuación diferencial es de la forma

$$y_p(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} + \gamma x^2 e^{-x} = (\gamma x^2 + \beta x + \alpha) e^{-x}$$

$$Dy_p = -(\gamma x^2 + (\beta - 2\gamma)x + (\alpha - \beta)) e^{-x}$$

$$D^2 y_p = (\gamma x^2 + (\beta - 4\gamma)x + (2\gamma - 2\beta + \alpha)) e^{-x}$$

Luego,

$$x^2 e^{-x} = (D + 2)(D - 1)y_p = [-2\gamma x^2 - (2\beta + 2\gamma)x + (2\gamma - \beta - 2\alpha)] e^{-x}$$

Entonces, $y_p = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}x e^{-x} - \frac{3}{4}e^{-x}$.

Luego, la solución de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}x e^{-x} - \frac{3}{4}e^{-x}$$

- c) Las raíces de $m^2 + 3m + 2 = 0$ son $m_1 = -1$ y $m_2 = -2$, entonces

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. De las condiciones iniciales tenemos

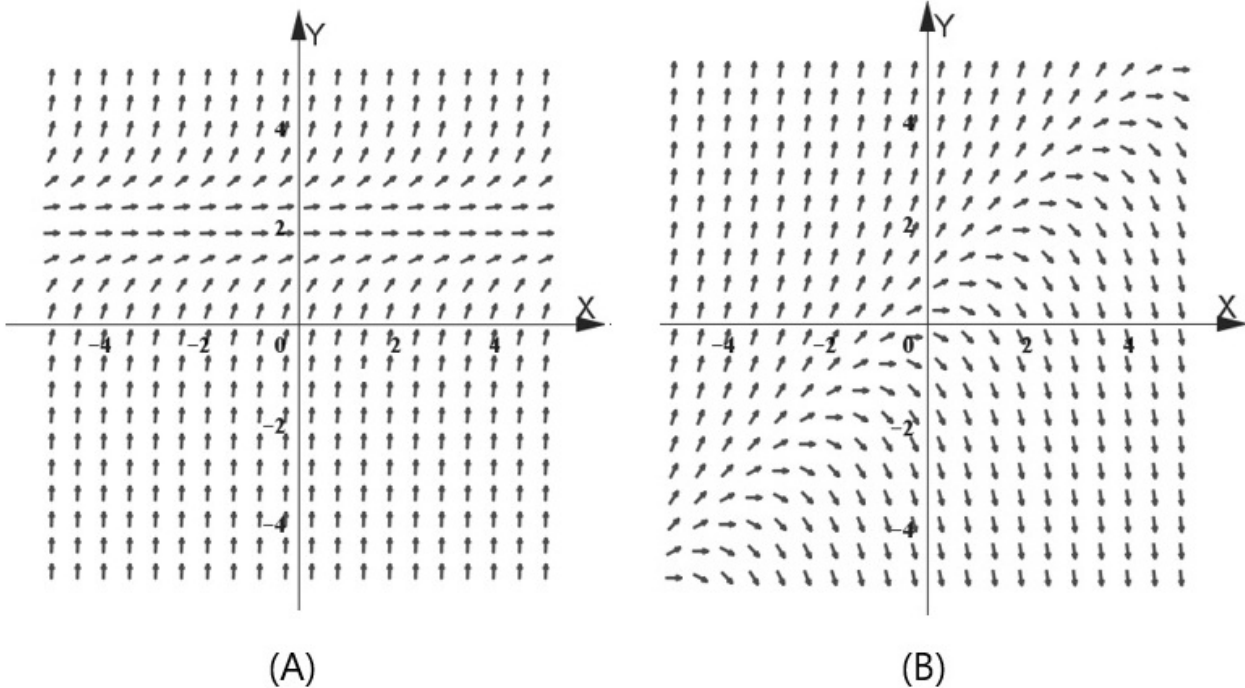
$$y = 5x^{-1} - 4x^{-2}.$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

- (a) (1.5 puntos) Se muestra el campo de direcciones de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

Indique, ¿cuál de las imágenes A ó B corresponde a una ecuaciones diferencial autónoma?.

Para cada caso, trace la curva solución que pase por el punto el punto $y(2) = 2$.



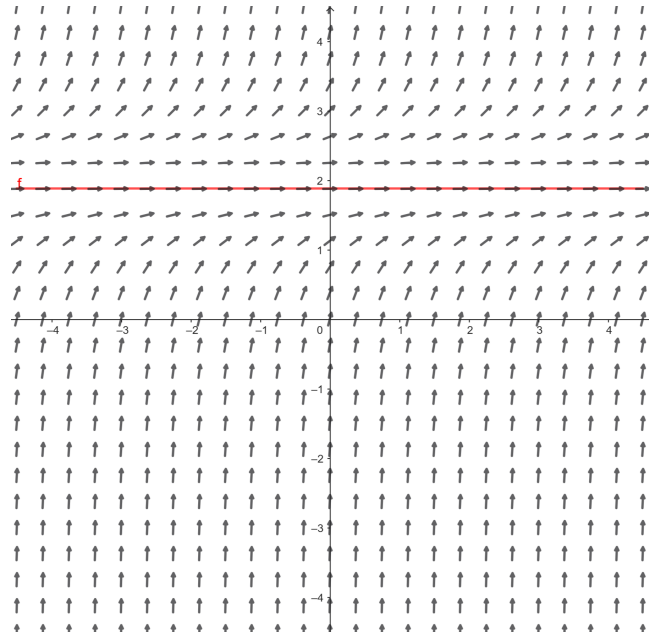
- (b) (1.5 puntos) Sea el sistema diferencial lineal de primer orden

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Determine la solución del sistema usando el método de **eigenvalores y eigenvectores** de la matriz.

Solución:

- a) En la imagen B se tiene que en $(2, 2)$ se cumple $y' = 0$, pero $y' > 0$ en $(0, 2)$, entonces no puede ser una ecuación diferencial autónoma.
Por lo tanto, la imagen A es la que corresponda a una ecuación diferencial autónoma.



b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ es el polinomio característico del sistema lineal. Los eigenvalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$ con eigenvectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ respectivamente. Por lo tanto, la solución de dicho sistema es

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{5x} \end{bmatrix}$$

Formulario

Examen Parcial - 2025-1

1. Modelo de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

2. Mezclas

$$\frac{dA}{dt} = \left(\text{Razón de} \right)_{\text{entrada}} - \left(\text{Razón de} \right)_{\text{salida}}$$

3. ED lineal de 1er orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

4. Tiempo de vaciado

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_0}{A_h} \sqrt{2gh}$$

5. Caídas de voltaje

- Para una resistencia: $V = RI$
- Para una bobina: $V = L \frac{dI}{dt}$
- Para un condensador: $V = \frac{Q}{C}$
- En general: $I = \frac{dQ}{dt}$

6. Variación de parámetros

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$\Rightarrow y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$u'_1 = \frac{W_1}{W}, \quad u'_2 = \frac{W_2}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}$$

9. Ecuación de Cauchy-Euler

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

- **Caso 1:** Raíces reales y diferentes:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

- **Caso 2:** Raíces reales y repetidas:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln(x)$$

- **Caso 3:** Raíces complejas conjugadas. $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$,

$$y = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x))$$

10. Coeficientes indeterminadas

$g(x)$	$y_p(x)$
1 (cualquier constante)	A
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$\sin(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
$\cos(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
e^{5x}	Ae^{5x}
$x^2 e^{7x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{7x}$
$e^{3x} \sin(8x)$	$Ae^{3x} \sin(8x) + Be^{3x} \cos(8x)$

11. Operador anulador

- D^n anula a las funciones:
 $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}$
- $(D - \alpha)^n$ anula a las funciones:
 $\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, x^3 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}\}$.
- $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula a las funciones:

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

$$x e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

$$x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots,$$

$$x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}.$$