

Apellidos y Nombres:

Indicaciones:

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 puntos)

- a) (3 puntos) Una planta procesadora de jugos naturales emplea un sistema de mezcla en dos tanques conectados en cascada con el objetivo de regular la concentración de azúcar en su producto final. El primer tanque, con un volumen de 100 litros, recibe un flujo de entrada de $5L/min$ de jugo con una concentración de $2gr/L$, éste tanque se encuentra completamente mezclado en todo momento y su contenido se vierte directamente a la misma velocidad en un segundo tanque de igual volumen, el cual también mantiene su contenido perfectamente mezclado. A su vez, el segundo tanque descarga su contenido hacia el sistema de envasado a una tasa constante de $5L/min$. Inicialmente, el primer tanque contiene $20gr$ de azúcar disueltos en el líquido, mientras que el segundo tanque está lleno de jugo sin contenido de azúcar.

Si $A(t)$ y $B(t)$ representa la cantidad de azúcar en gramos presente en cada tanque en función del tiempo. Modele las ecuaciones diferenciales diferenciales que describe la cantidad de azúcar. Indique las condiciones iniciales.

- b) (3 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{20}x + 10 - 9e^{-\frac{t}{20}}$$

Solución:

- a) Veamos la EDO para el primer tanque. Luego de t minutos el volumen de salmuera en el primer tanque será: $(100 + 5t - 5t)$ litros = 100 litros.
Razón de entrada de sal: $5 \times 2 = 10$.
Razón de salida de sal: $5 \times \frac{A(t)}{100}$.
Por lo tanto,

$$\frac{dA}{dt}(t) = 10 - \frac{5}{100}A(t), \quad A(0) = 20.$$

Por otro lado, el volumen de salmuera en el segundo tanque será: $(100 + 5t - 5t)$ litros = 100 litros.

Razón de entrada de sal: $5 \times \frac{A(t)}{100}$.
Razón de salida de sal: $5 \times \frac{B(t)}{100}$.
Por lo tanto,

$$\frac{dB}{dt}(t) = \frac{5}{100}A(t) - \frac{5}{100}B(t), \quad B(0) = 0.$$

b) La ecuación diferencial es equivalente a

$$x' + \frac{x}{20} = 10 - 9e^{-\frac{t}{20}}$$

El factor integrante es $e^{\int \frac{1}{20} dt} = e^{\frac{t}{20}}$, entonces

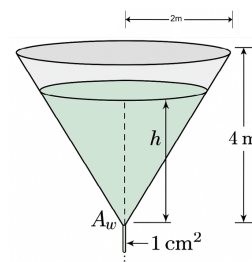
$$[e^{\frac{t}{20}} x]' = (e^{\frac{t}{20}})(10 - 9e^{-\frac{t}{20}}) = 10e^{\frac{t}{20}} - 9$$

$$e^{\frac{t}{20}} x = 200e^{\frac{t}{20}} + 9t + C$$

$$x = 200 + 9te^{-\frac{t}{20}} + Ce^{-\frac{t}{20}}$$

Problema 2

En una planta de tratamiento de aguas residuales, se utiliza un tanque de sedimentación con forma cónica (vértice hacia abajo) para almacenar el agua tratada antes de su descarga final. El tanque tiene una altura de 4 metros y un radio superior de 2 metros. Al inicio del proceso el tanque se encuentra lleno de agua, y el vaciado se realiza a través de un orificio circular en la parte inferior, con un área de salida de $A_w = 1 \text{ cm}^2$. Considerando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, y el factor de contracción/fricción $c=0.2$.



- (a) (2 pts) Determine la ecuación diferencial que describe la altura del agua $h(t)$ en el tanque en función del tiempo. Indique la condición inicial.
- (b) (3 pts) Resuelva la ED y determina la altura $h(t)$.
- (c) (1 pto) Determine la altura del agua después de 3 horas.

Solución:

a) La EDO será

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_0}{A_h} \sqrt{2gh}.$$

Además, el valor inicial será $h(0) = 4$. Por dato $A_0 = 10^{-4} \text{ m}^2$ y para hallar A_h , podemos usar el hecho que para un t fijo, se tiene de la semejanza de triángulos que $r(t) = h(t)/2$ y, por tanto, $A(t) = \pi(h(t)/2)^2 = \frac{\pi h(t)^2}{4}$. Reemplazando todos los datos:

$$\frac{dh}{dt} = -0,2 \frac{10^{-4}}{\frac{\pi h(t)^2}{4}} \sqrt{19,6h}.$$

b) Del anterior item se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int h^{3/2} dh = \int \frac{-0,8 \cdot 10^{-4}}{\pi} \sqrt{19,6} dt$$

$$\frac{2}{5} h^{5/2} = -1,128 \cdot 10^{-4} t + C$$

$$h = \left(\frac{5}{2} (-1,128) \cdot 10^{-4} t + \frac{5}{2} C \right)^{2/5}$$

De la condición inicial:

$$h(0) = \left(\frac{5}{2} C \right)^{2/5} = 4 \Rightarrow C = \frac{64}{5}$$

Finalmente,

$$h = \left(\frac{5}{2} (-1,128) \cdot 10^{-4} t + 32 \right)^{2/5}$$

c) Como el tiempo está expresado en segundos entonces evaluaremos h para $t = 3hs = 10800s$:

$$h(10800) \approx 3,86$$

Problema 3

Problema 3 (8 puntos)

- a) (2 puntos) Verifique si las soluciones $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$ de la ecuación diferencial homogénea:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

son linealmente independientes.

Nota: Considere únicamente el intervalo $x > 0$, donde las funciones dadas están definidas

- b) (3 puntos) Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Use: **coeficientes indeterminados-método anulador** Nota: Si usa un método distinto al solicitado, su resolución no será evaluada.

- c) (3 puntos) Resuelve la siguiente ecuación diferencial utilizando el **método de variación de parámetros**

$$x^2 y'' - 5xy' + 6y = \frac{1}{x^2},$$

sabiendo que las solución de la ecuación homogénea asociada es: $y_h = c_1 x^2 + c_2 x^3$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x \ln x + x \end{vmatrix} = 2x^3 \ln x + x^3 - 2x^3 \ln x = x^3 > 0,$$

para todo $x > 0$. Por tanto $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes.

- b) La ecuación característica es

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

De aquí, las raíces son $r_1 = 2$ y $r_1 = 1$. Luego la solución homogénea será:

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

La forma particular tiene la forma $y_p = Axe^x$. De aquí, $y'_p = Ae^x + Axe^x$ y además $y''_p = 2Ae^x + Axe^x$. Reemplazando en la ecuación original:

$$2Ae^x + Axe^x - 3(Ae^x + Axe^x) + 2Axe^x = e^x$$

$$-Ae^x = e^x \Rightarrow A = -1$$

Entonces, la solución particular es $y_p = -xe^x$ y la solución general $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - xe^x$.

- c) $y_p = u_1 x^2 + u_2 x^3$, $u'_1 = \frac{W_1}{W}$, $u'_2 = \frac{W_2}{W}$.

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 1/x^4 & 3x^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 1/x^4 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}$$

$$u'_1 = \frac{-1}{x^5} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{4x^4}$$

$$u'_2 = \frac{1}{x^6} \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{5x^5}$$

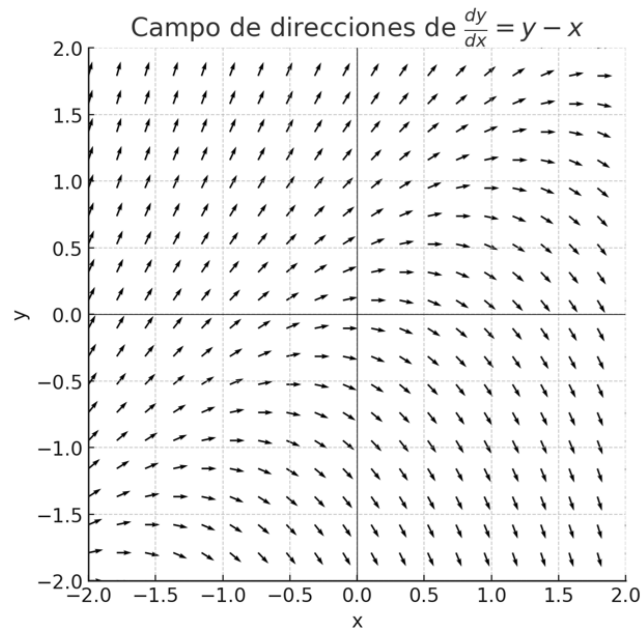
$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{4x^4} \cdot x^2 - \frac{1}{5x^5} \cdot x^3$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{20x^2}$$

$$\Rightarrow y = C_1x^2 + C_2x^3 + \frac{1}{20x^2}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (1.5 puntos) Observa el siguiente campo de direcciones: Con base en el campo de direcciones,



identifica cuál de las siguientes curvas podría representar $\frac{dy}{dx} = y - x$ que pasa por el punto $(0, 1)$:

- a) $y = x + 1$
- b) $y = x^2 + 1$
- c) $y = x - 1$

Justifique su elección

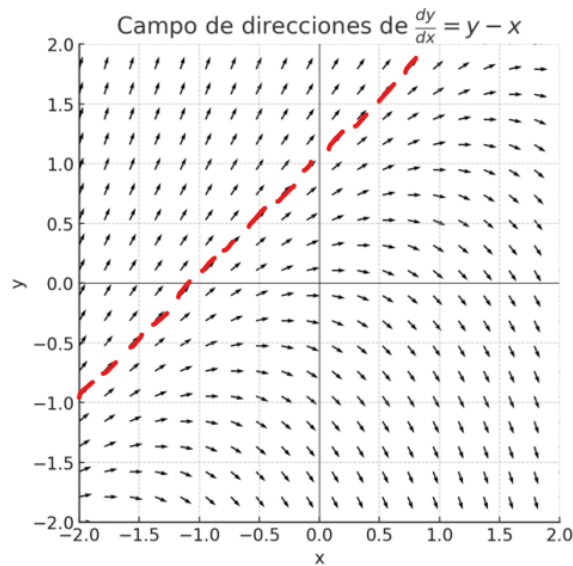
(b) (1.5 puntos) Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} x'(t) = 3x + 4y \\ y'(t) = -x + y \end{cases}$$

Determine la solución del sistema usando el método de eliminación sistemática.

Solución:

- a) Tenemos que la solución que pasa por el punto $(0, 1)$ es lineal. Entonces puede ser la opción a) o c), sin embargo, la gráfica tiene un desplazamiento vertical positivo. Por tanto, la curva es la a).



Solución:

b) Se tienen las siguientes ecuaciones

$$Dx = 3x + 4y$$

$$Dy = -x + y$$

Derivando la segunda ecuación se obtiene $D^2y = -Dx + Dy$ y, reemplazando aquí la primera ecuación, $D^2y = -(3x + 4y) + Dy$. Podemos reemplazar $x = y - Dy$ (segunda ecuación) en esta ecuación y se obtiene:

$$D^2y - 4Dy + 7y = 0$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 4r - 7 = 0$$

Las raíces son $r_1 = 2 + i\sqrt{3}$ y $r_2 = 2 - i\sqrt{3}$. La solución de esta EDO homogénea es

$$y(t) = e^{2t}(C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t)$$

. Reemplazando esto en la segunda ecuación, tenemos que:

$$x(t) = e^{2t}((-C_1 - \sqrt{3}C_2)\cos \sqrt{3}t + (\sqrt{3}C_1 - C_2)\sin \sqrt{3}t).$$

Formulario

Examen Parcial - 2025-1

1. Modelo de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

2. Mezclas

$$\frac{dA}{dt} = \left(\text{Razón de} \right)_{\text{entrada}} - \left(\text{Razón de} \right)_{\text{salida}}$$

3. ED lineal de 1er orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

4. Tiempo de vaciado

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_0}{A_h} \sqrt{2gh}$$

5. Caídas de voltaje

- Para una resistencia: $V = RI$
- Para una bobina: $V = L \frac{dI}{dt}$
- Para un condensador: $V = \frac{Q}{C}$
- En general: $I = \frac{dQ}{dt}$

6. Variación de parámetros

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$\Rightarrow y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$u'_1 = \frac{W_1}{W}, \quad u'_2 = \frac{W_2}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}$$

9. Ecuación de Cauchy-Euler

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

- **Caso 1:** Raíces reales y diferentes:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

- **Caso 2:** Raíces reales y repetidas:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln(x)$$

- **Caso 3:** Raíces complejas conjugadas. $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$,

$$y = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x))$$

10. Coeficientes indeterminadas

$g(x)$	$y_p(x)$
1 (cualquier constante)	A
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$\sin(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
$\cos(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
e^{5x}	Ae^{5x}
$x^2 e^{7x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{7x}$
$e^{3x} \sin(8x)$	$Ae^{3x} \sin(8x) + Be^{3x} \cos(8x)$

11. Operador anulador

- D^n anula a las funciones:
 $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}$
- $(D - \alpha)^n$ anula a las funciones:
 $\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, x^3 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}\}$.
- $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula a las funciones:

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

$$x e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

$$x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots,$$

$$x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}.$$