

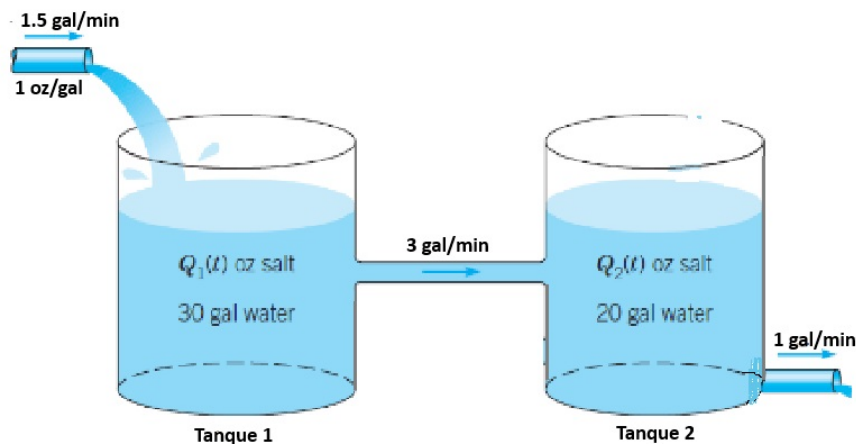
Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1

- (a) (3 ptos) Considere el siguiente diagrama de dos tanques interconectados.



Suponga que inicialmente el tanque 1 tiene 30 galones (gal) de agua y 55 onzas (oz) de sal, mientras que el tanque 2 contiene 20 gal de agua y 26 oz de sal. Suponga que $Q_1(t)$ y $Q_2(t)$ representa la cantidad de sal en el primer y segundo tanque, respectivamente. Use los datos en el diagrama para hallar el sistema de ecuaciones para $Q_1(t)$ y $Q_2(t)$. Escriba las condiciones iniciales. (Sólo plantee las ecuaciones).

- (b) (3 ptos) Resuelva la siguiente problema de valor inicial,

$$ty' + (t+1)y = t, \quad y(\ln(2)) = 1, \quad t > 1.$$

Solución:

- (a) Sean:

- $Q_1(t)$: cantidad de sal en el tanque 1 en un instante t .
- $Q_2(t)$: cantidad de sal en el tanque 2 en un instante t .
- $V_1(t)$: volumen de solución dentro del tanque 1 en un instante t .
- $V_2(t)$: volumen de solución dentro del tanque 2 en un instante t .

Notemos que en cada tanque el volumen es variable, luego:

$$V_1(t) = 30 + 1.5t - 3t = 30 - 1.5t$$

$$V_2(t) = 20 + 3t - 1t = 20 + 2t$$

Planteando las ecuaciones

$$\frac{dQ_1}{dt} = \left(1.5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \left(1 \frac{\text{oz}}{\text{gal}}\right) - \left(3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \left(\frac{Q_1}{V_1} \frac{\text{oz}}{\text{gal}}\right), \quad Q_1(0) = 55 \text{ oz}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = 1.5 - \frac{3Q_1}{30 - 1.5t}, \quad Q_1(0) = 55$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \left(3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \left(\frac{Q_1}{V_1} \frac{\text{oz}}{\text{gal}}\right) - \left(1 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \left(\frac{Q_2}{V_2} \frac{\text{oz}}{\text{gal}}\right), \quad Q_2(0) = 26 \text{ oz}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{3Q_1}{30 - 1.5t} - \frac{Q_2}{20 + 2t}, \quad Q_2(0) = 26$$

(b) Queremos resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden en su forma estándar

$$y' + \left(1 + \frac{1}{t}\right)y = 1, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 1$$

Esta es una ecuación diferencial es de la forma $y' + P(t)y = Q(t)$ con $P(t) = 1 + \frac{1}{t}$ y $Q(t) = 1$.

Calculamos el factor integrante μ :

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int P(t)dt} = e^{\int (1 + \frac{1}{t})dt} \\ &= e^{t + \ln(t)} = e^t e^{\ln(t)} = te^t \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu} \int \mu Q dt = \frac{1}{te^t} \int te^t dt \\ &= \frac{1}{te^t} (te^t - e^t + C) \\ &= 1 - \frac{1}{t} + \frac{C}{te^t} \end{aligned}$$

Para calcular la integral $\int te^t dt$, se empleó integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= t \Rightarrow du = dt \\ dv &= e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{aligned}$$

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

Usando la condición inicial $y(\ln 2) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{C}{\ln(2)e^{\ln 2}} \\ 1 &= 1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{C}{2 \ln 2} \\ \Rightarrow C &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial es:

$$y = 1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{te^t}$$

Problema 2

- (a) (**3 pts**) Modele la ecuación diferencial de la población P de cierta especie si se sabe que la razón de cambio de la población es directamente proporcional al cuadrado de la población actual e inversamente proporcional a la diferencia entre la población máxima M y la población actual. Indique si la ecuación diferencial es autónoma y si es lineal/no lineal (justifique su respuesta).
- (b) (**3 pts**) Ahora, suponga que la población de otra especie satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = (k \cos(t))P^2$$

donde k es una constante positiva. Resuelva esta nueva ecuación. Considere $P(0) = P_0$.

Solución:

- (a) Dado que la razón de cambio de P es proporcional a P^2 , podemos escribir:

$$\frac{dP}{dt} \propto P^2$$

Además, sabemos que esta razón de cambio también es inversamente proporcional a $(M - P)$:

$$\frac{dP}{dt} \propto \frac{1}{M - P}$$

Combinando ambas proporcionalidades e introduciendo una constante de proporcionalidad k tenemos:

$$\frac{dP}{dt} = k \frac{P^2}{M - P}$$

Esta ecuación diferencial es autónoma porque no depende explícitamente del tiempo t . Además, es no lineal debido al término P^2 en el numerador y al término $(M - P)$ en el denominador.

- (b) Para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k \cos(t)P^2, \quad k > 0, \quad P(0) = P_0$$

Hacemos separación de variables:

$$\frac{dP}{P^2} = k \cos(t) dt$$

Integrando ambos lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P^2} &= \int k \cos(t) dt \\ -\frac{1}{P} &= k \sin(t) + C \end{aligned}$$

Despejando P :

$$P = \frac{-1}{k \sin(t) + C}$$

Usando la condición inicial $P(0) = P_0$:

$$\begin{aligned}P_0 &= \frac{-1}{k \operatorname{sen}(0) + C} \\P_0 &= \frac{-1}{C} \\\Rightarrow C &= -\frac{1}{P_0}\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de C en la ecuación de P :

$$P = \frac{-1}{k \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{P_0}} = \frac{P_0}{1 - kP_0 \operatorname{sen}(t)}$$

Problema 3

- (a) **(2 pts)** Compruebe si las funciones $f(t) = e^t \sin(t)$ y $g(t) = e^t \cos(t)$ son linealmente independientes.
- (b) **(3 pts)** Resuelva la siguiente ecuación

$$4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \sqrt{1 - x^2}$$

Sugerencia: $2 \int \sqrt{1 - x^2} dx = \arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2} + C$

- (c) **(3 pts)** Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 3.$$

Solución:

- (a) Se quiere demostrar que las funciones $f(t) = e^t \sin(t)$ y $g(t) = e^t \cos(t)$ son linealmente independientes.

Para verificar que f y g identificar que dichas funciones son soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden y apelar al criterio del Wronskiano. Sin embargo, un camino más sencillo es formar una combinación lineal de f y g :

$$\begin{aligned}af(t) + bg(t) &= 0 \\ae^t \operatorname{sen}(t) + be^t \cos(t) &= 0\end{aligned}$$

Dividiendo por e^t (que nunca es cero):

$$a \operatorname{sen}(t) + b \cos(t) = 0.$$

Para que esta ecuación se cumpla para todo t , a y b deben ser cero.

Si $t = 0$:

$$b = 0$$

Si $t = \frac{\pi}{2}$:

$$a = 0$$

Por lo tanto, f y g son linealmente independientes.

(b) Se pide resolver la ecuación diferencial $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$.

Como el término no homogéneo $e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$ no se puede manejar con coeficientes indeterminados se debe usar el método de variación de parámetros.

Primero encontramos la solución homogénea. La ecuación auxiliar es:

$$\begin{aligned}4r^2 - 4r + 1 &= 0 \\(2r - 1)^2 &= 0\end{aligned}$$

La ecuación auxiliar tiene una raíz doble $r = \frac{1}{2}$.

La solución homogénea para una raíz doble m es de la forma:

$$y_h = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

Sustituyendo $m = \frac{1}{2}$ en la solución homogénea:

$$y_h = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2}$$

Para encontrar la solución particular y_p mediante el método de variación de parámetros, asumimos que la solución tiene la forma:

$$y_p = u_1 e^{x/2} + u_2 x e^{x/2}$$

donde u_1 y u_2 son funciones de x .

Reescribimos la ecuación diferencial original en su forma estándar:

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$$

Para aplicar el método de variación de parámetros, necesitamos calcular el Wronskiano W de las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$W = \begin{vmatrix} e^{x/2} & x e^{x/2} \\ (e^{x/2})' & (x e^{x/2})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x/2} & x e^{x/2} \\ \frac{1}{2}e^{x/2} & e^{x/2} + \frac{1}{2}x e^{x/2} \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante:

$$W = e^{x/2} \left(e^{x/2} + \frac{1}{2}x e^{x/2} \right) - \frac{1}{2}e^{x/2} x e^{x/2} = e^x$$

Luego, calculamos W_1 y W_2 :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{x/2} \\ \frac{1}{4}e^{x/2}\sqrt{1-x^2} & e^{x/2} + \frac{1}{2}x e^{x/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}x e^x \sqrt{1-x^2}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{x/2} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{x/2} & \frac{1}{4}e^{x/2}\sqrt{1-x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}e^x \sqrt{1-x^2}$$

Las derivadas de u_1 y u_2 están dadas por:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{4}$$

Integrando para encontrar u_1 y u_2 :

$$u_1 = \int u_1' dx = \int -\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} dx = \frac{(1-x^2)^{3/2}}{12}$$

$$u_2 = \int u_2' dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} dx = \frac{1}{8} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

Como solo necesitamos una solución particular, podemos ignorar las constantes de integración C_3 y C_4 . Sustituyendo u_1 y u_2 en la expresión de y_p :

$$y_p = \frac{(1-x^2)^{3/2}}{12} e^{x/2} + \frac{1}{8} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right) x e^{x/2}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{12} e^{x/2} + \frac{1}{8} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right) x e^{x/2}$$

(c) Sea la ecuación diferencial $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, con las condiciones iniciales $y(1) = 5$ y $y'(1) = 3$.

Para resolver la ecuación diferencial, primero encontramos la ecuación auxiliar:

$$am^2 + (b-a)m + c = 0.$$

En este caso, $a = 1$, $b = -3$ y $c = 4$. Sustituyendo estos valores en la ecuación auxiliar:

$$\begin{aligned} m^2 + (-3-1)m + 4 &= 0 \\ (m-2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación auxiliar tiene una raíz doble $m = 2$.

La solución general para una raíz doble m en una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma:

$$y = C_1 x^m + C_2 x^m \ln(x)$$

Sustituyendo $m = 2$ en la solución general:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x)$$

Para encontrar C_1 y C_2 , utilizamos las condiciones iniciales. Usando $y(1) = 5$:

$$\begin{aligned} 5 &= C_1(1)^2 + C_2(1)^2 \ln(1) \\ C_1 &= 5 \end{aligned}$$

Derivando y :

$$y' = 2C_1x + 2C_2x \ln(x) + C_2x^2 \frac{1}{x}$$

$$y' = 2C_1x + 2C_2x \ln(x) + C_2x$$

$$y' = (2C_1 + C_2)x + 2C_2x \ln(x)$$

Usando $y'(1) = 3$ y $C_1 = 5$:

$$3 = (2(5) + C_2)(1) + 2C_2(1) \ln(1)$$

$$3 = 10 + C_2$$

$$C_2 = -7$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = 5x^2 - 7x^2 \ln(x)$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (1.5 pts) Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y^2) = f(y)$$

grafique la función $f(y)$ y clasifique los puntos críticos de la ecuación anterior.

(b) (1.5 pts) Resuelva el siguiente sistema hallando los autovalores y autovectores.

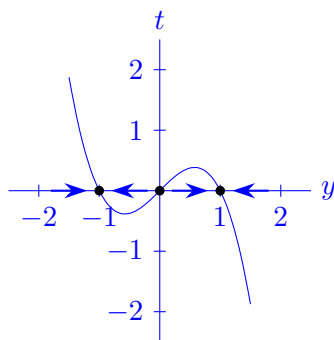
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Solución:

(a) Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y^2) = f(y)$$

Gráfico de la función pendiente $f(y)$:



Para encontrar los puntos críticos, igualamos la función pendiente a cero y resolvemos para y :

$$y(1 - y^2) = 0$$

Las soluciones son $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ y $y_3 = 1$.

Para clasificar los puntos críticos, analizamos el signo de $f(y)$ en intervalos alrededor de cada punto:

- $y_1 = -1$ es atractor pues:
Para $y < -1$, $f(y) > 0$ (creciente). Para $-1 < y < 0$, $f(y) < 0$ (decreciente).
- $y_2 = 0$ es repulsor pues:
Para $-1 < y < 0$, $f(y) < 0$ (decreciente). Para $0 < y < 1$, $f(y) > 0$ (creciente).
- $y_3 = 1$ es atractor pues:
Para $0 < y < 1$, $f(y) > 0$ (creciente). Para $y > 1$, $f(y) < 0$ (decreciente).

(b) Se pide resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los eigenvalores, resolvemos la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 2 \\ -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (-6 - \lambda)(1 - \lambda) - (2)(-3) &= 0 \\ \lambda^2 + 5\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda + 5) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -5$.

Para cada eigenvalor, encontramos el eigenvector asociado resolviendo $(A - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

- $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución es $x_2 = 3x_1$.

Un eigenvector asociado a $\lambda_1 = 0$ es $\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- $\lambda_2 = -5$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución es $x_1 = 2x_2$.

Un eigenvector asociado a $\lambda_2 = -5$ es $\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Sustituyendo los eigenvalores y eigenvectores:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{0t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} x &= C_1 + 2C_2 e^{-5t} \\ y &= 3C_1 + C_2 e^{-5t} \end{aligned}$$