

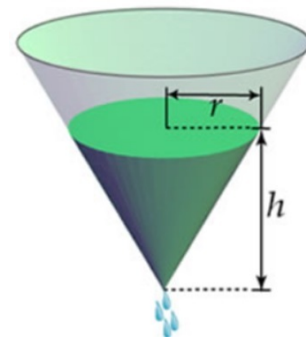
Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Pregunta 1

- (a) (4 ptos) Se tiene un recipiente en forma cónica con el vértice hacia abajo, como se muestra en la figura. Se hace un agujero de radio igual a 5 mm en la parte inferior en el instante en que la altura del líquido en el recipiente era la mitad de la altura total, formule la Ecuación Diferencial que modele la altura de líquido en el recipiente respecto del tiempo, en dicha ED no debería haber otras variables involucradas, incluya la condición inicial. Considere que el radio de la base es $R = 10 \text{ cm}$ y su altura es $H = 20 \text{ cm}$.



Solución:

Datos:

- Radio de la base del cono: $R = 10 \text{ cm}$
- Altura total del cono: $H = 20 \text{ cm}$
- Radio del agujero en la base: $r_a = 5 \text{ mm} = 0,5 \text{ cm}$
- Altura inicial del líquido: $h(0) = \frac{H}{2} = 10 \text{ cm}$

Paso 1: Relación geométrica en el cono

Como el cono es similar en toda su extensión, existe una relación lineal entre el radio r y la altura h , dada por:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \implies r = \frac{R}{H}h$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula del A_h :

$$A(h) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{H}h \right)^2$$

Paso 2: Ecuación de Torricelli

$$\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_0}{A_h} \sqrt{2gh}$$

donde $A_0 = \pi r_0^2$ es el área del agujero.

Paso 3: Simplificar la ecuación

Simplificamos la ecuación dividiendo ambos lados por π :

$$\frac{R^2}{H^2} h^2 \frac{dh}{dt} = -r_a^2 \sqrt{2gh}$$

Finalmente, despejamos $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{r_a^2 H^2 \sqrt{2gh}}{R^2 h^2}$$

Condición inicial: La altura inicial del líquido en el recipiente es $h(0) = 10$ cm.

Por lo tanto, la ecuación diferencial que modela la altura del líquido respecto al tiempo es:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{r_a^2 H^2 \sqrt{2g}}{R^2 h^{3/2}}$$

con la condición inicial:

$$h(0) = 10 \text{ cm}$$

(b) (**2 pts**) Resolver la siguiente ED:

$$e^x y' + 2 \frac{e^x}{x} y = x^{-2}$$

Solución:

Dividimos toda la ecuación por e^x para obtenerla en forma estándar:

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2 e^x}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

donde $P(x) = \frac{2}{x}$ y $Q(x) = \frac{1}{x^2 e^x}$.

El factor integrante $\mu(x)$ es:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln |x|} = x^2$$

Luego:

$$x^2 y = \int \frac{1}{e^x} dx$$

La integral de $\frac{1}{e^x}$ es $-e^{-x}$, por lo que:

$$x^2 y = -e^{-x} + C$$

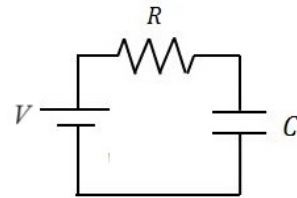
Despejamos y :

$$y = -\frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{C}{x^2}$$

Problema 2

Considere un circuito RC en serie (como se muestra en la figura), donde $R = 10 \times 10^3 \Omega$, $C = \frac{1}{3} \times 10^{-4} F$ y $E(t) = 200e^t \sin(4t)$ voltios. Considere que inicialmente el condensador está totalmente descargado.

- (a) (**2 pts**) Plantee la ecuación diferencial para la carga en el condensador. Indique la condición inicial.
- (b) (**4 pts**) Resuelva la ecuación del ítem anterior, utilice las condiciones iniciales y determine la carga del condensador en función del tiempo. Determine también la corriente que pasa por el circuito en función del tiempo.



Sugerencia: $\int e^{at} \sin(bt) dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \sin(bt) - b \cos(bt))$

Solución:

- (a) **Ecuación diferencial para la carga en el condensador:**

La ecuación diferencial para la carga $Q(t)$ en el condensador en un circuito RC es:

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

Sustituyendo los valores de $R = 10 \times 10^3 \Omega$, $C = \frac{1}{3} \times 10^{-4} F$, y $E(t) = 200e^t \sin(4t)$, la ecuación se convierte en:

$$10^4 \frac{dQ(t)}{dt} + 3 \times 10^4 Q(t) = 200e^t \sin(4t)$$

Dividiendo toda la ecuación entre 10^4 :

$$\frac{dQ(t)}{dt} + 3Q(t) = 0,02e^t \sin(4t)$$

- (b) **Solución de la ecuación diferencial:**

La ecuación diferencial es de la forma:

$$\frac{dQ(t)}{dt} + 3Q(t) = 0,02e^t \sin(4t)$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{3t}$$

Multiplicando toda la ecuación por el factor integrante:

Despejamos $Q(t)$:

$$Q(t) = \frac{e^t (\sin(4t) - \cos(4t))}{400} + Ce^{-3t}$$

Aplicando la condición inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = \frac{1(0 - 1)}{400} + C \Rightarrow C = \frac{1}{400}$$

Entonces, la solución final para la carga es:

$$Q(t) = \frac{e^t (\sin(4t) - \cos(4t))}{400} + \frac{1}{400} e^{-3t}$$

- Para la corriente $I(t)$, sabemos que:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Derivamos la solución general para obtener la corriente:

$$I(t) = \frac{e^t}{400}(\operatorname{sen}(4t) - \cos(4t)) + \frac{e^t}{400}(4\cos(4t) + 4\operatorname{sen}(4t)) - \frac{3}{400}e^{-3t}$$

$$I(t) = \frac{e^t}{400}(5\operatorname{sen}(4t) + 3\cos(4t)) - \frac{3}{400}e^{-3t}$$

Problema 3

(a) **(2 ptos)** Considere la ecuación diferencial

$$ay''' + by'' + cy' + dy = 0$$

Si la solución de dicha ecuación diferencial es:

$$y = C_1e^{0x} + C_2e^x + C_3e^{-x}$$

determine los valores de a , b , c y d .

Solución:

Dado que las soluciones de la ecuación son $e^{0x} = 1$, e^x , y e^{-x} , los exponentes asociados son $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, y $r_3 = -1$. Estos son los valores de las raíces de la ecuación característica.

La ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$ar^3 + br^2 + cr + d = 0$$

Sustituyendo las raíces $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, y $r_3 = -1$, obtenemos el polinomio característico:

$$(r - 0)(r - 1)(r + 1) = r(r - 1)(r + 1) = r(r^2 - 1) = r^3 - r$$

Por lo tanto, la ecuación característica es:

$$r^3 - r = 0$$

Comparando con $ar^3 + br^2 + cr + d = 0$, obtenemos los coeficientes:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1, \quad d = 0$$

(b) **(3 ptos)** Considere la ecuación diferencial no-homogénea

$$y'' + y = \tan(x)$$

Si las soluciones de la parte homogénea son $y_1(x) = \cos(x)$ y $y_2(x) = \sin(x)$, determine la solución general.

Solución:

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Ahora utilizamos el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular. La solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x)$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones a determinar.

Determinamos los Wronskianos:

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{-\sin^2(x)}{\cos x}; \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$$

Luego, determinamos las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$:

$$u_1 = \int \frac{-\sin^2(x)}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2(x) - 1}{\cos x} dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$u_2 = \int \sin x dx = -\cos x$$

Finalmente, la solución general es:

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + [\sin x - \ln|\sec x + \tan x|] \cos(x) + [-\cos x] \sin(x)$$

- (c) **(3 ptos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial de coeficientes variables con condiciones iniciales:

$$xy'' + 5y' + \frac{3}{x}y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -3$$

Solución:

Esta es una ecuación diferencial de **Euler-Cauchy**, que tiene la forma general:

$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

La solución para una ecuación de este tipo es de la forma $y(x) = x^r$. Para encontrar los valores de r , sustituimos $y(x) = x^r$ en la ecuación dada:

$$x^r \implies y'(x) = rx^{r-1}, \quad y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$x \cdot r(r-1)x^{r-2} + 5rx^{r-1} + \frac{3}{x}x^r = 0$$

$$r(r-1)x^{r-1} + 5rx^{r-1} + 3x^{r-1} = 0$$

Factorizando x^{r-1} :

$$x^{r-1} (r(r-1) + 5r + 3) = 0$$

Resolviendo el polinomio característico:

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = -3$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-3}$$

Usamos las condiciones iniciales para determinar C_1 y C_2 . Sabemos que $y(1) = 1$:

$$y(1) = C_1 + C_2 = 1 \quad (1)$$

También sabemos que $y'(1) = -3$:

$$y'(x) = -C_1 x^{-2} - 3C_2 x^{-4}$$

$$y'(1) = -C_1 - 3C_2 = -3 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2):

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$-C_1 - 3C_2 = -3$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$-2C_2 = -2 \implies C_2 = 1$$

$$C_1 = 0$$

Por lo tanto, la solución es:

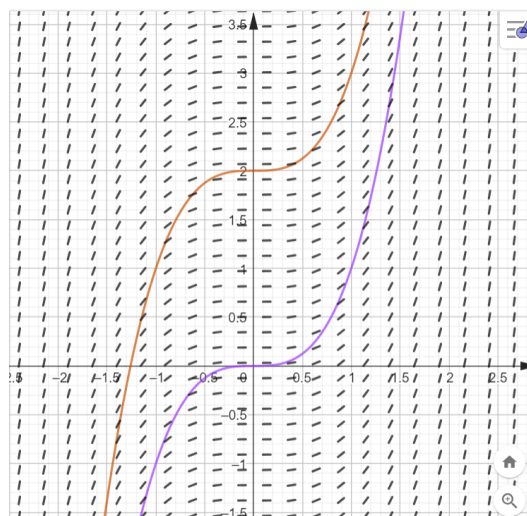
$$y(x) = x^{-3}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

- (a) (1.5 pts) Considere la ecuación diferencial $y' = x^2$, determine cuál de las dos siguientes gráficas representa el campo de direcciones correctamente y grafique las soluciones que pasan por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ respectivamente. Justifique su elección.

Solución:

Justificación: Cuando el valor de x es negativo, las derivadas son positivas por eso la gráfica escogida es la mostrada, se incluyen las gráficas de funciones que pasan por los puntos pedidos.



(b) (1.5 ptos) Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= 2x_1 + x_2 \\x_2'(t) &= 3x_1\end{aligned}$$

Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación sistemática mediante operadores.

Solución: El sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \quad (1)$$

$$x_2'(t) = 3x_1(t) \quad (2)$$

Paso 1: Usar el operador diferencial D

Utilizamos el operador diferencial $D = \frac{d}{dt}$, donde $Dx_1(t) = x_1'(t)$ y $Dx_2(t) = x_2'(t)$. Reescribimos el sistema en términos de D :

$$(D - 2)x_1 - x_2 = 0 \quad (3)$$

$$Dx_2 - 3x_1 = 0 \quad (4)$$

Paso 2: Eliminar $x_2(t)$

Para esto multiplicamos la primera ecuación por D y sumamos ambas:

$$D(Dx_1 - 2x_1) = 3x_1$$

La ecuación diferencial es:

$$x_1''(t) - 2x_1'(t) - 3x_1(t) = 0$$

Paso 3: Resolver la ED

La ecuación característica asociada es:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = 3, \quad r_2 = -1$$

La solución general para $x_1(t)$ es:

$$x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

Paso 4: Hallar $x_2(t)$

Ahora que tenemos $x_1(t)$, utilizamos la ecuación (5) para encontrar $x_2(t)$:

$$x_2(t) = Dx_1(t) - 2x_1(t)$$

Calculamos $Dx_1(t)$:

$$Dx_1(t) = 3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación para $x_2(t)$:

$$x_2(t) = (3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}) - 2(C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t})$$

$$x_2(t) = C_1(3 - 2)e^{3t} + C_2(-1 - 2)e^{-t}$$

$$x_2(t) = C_1e^{3t} - 3C_2e^{-t}$$

Solución final

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$x_1(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$$

$$x_2(t) = C_1e^{3t} - 3C_2e^{-t}$$