

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 puntos)

Analizando la población P de una especie de cuyes en una granja donde la disponibilidad de alimento y espacio es limitada, se pudo comprobar que la tasa de crecimiento de la población de cuyes es proporcional a la cantidad de cuyes y también es proporcional a la diferencia entre la capacidad máxima de cuyes N y la cantidad de cuyes P . Inicialmente se tenía 2 cuyes y se sabe que se puede mantener como máximo $N = 400$ cuyes en dicha granja. Además, se sabe que el factor de proporcionalidad es 0,0001.

- a) (2 puntos) Modele la ecuación diferencial, indique las variables involucradas y sus unidades.

Solución:

Si una cantidad M es proporcional a A y también a B , entonces M es proporcional a AB , lo que significa que existe una constante k tal que

$$M = kAB.$$

En nuestro caso, siendo P la cantidad de cuyes,

- M : La tasa de crecimiento de la población de cuyes $\frac{dP}{dt}$,
- A : La cantidad de cuyes P ,
- B : La diferencia entre la capacidad máxima de cuyes y la cantidad de cuyes $N - P = 400 - P$,

se obtiene la siguiente ecuación,

$$\frac{dP}{dt} = kP(400 - P)$$

donde $k = 0,0001 = 1 \times 10^{-4}$. Por lo tanto, el problema de valores iniciales que modela la cantidad de cuyes está dado por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = 10^{-4}P(400 - P) \\ P(0) = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Donde P representa la cantidad de cuyes y t es el tiempo transcurrido desde el instante inicial.

- b) (4 puntos) Determine la expresión que define la cantidad de cuyes en el tiempo.

Solución:

Resolvemos la ecuación (1) por separación de variables, para obtener la cantidad de cuyes:

$$10^4 \frac{dP}{P(400 - P)} = dt$$
$$\frac{10^4}{400} \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{400 - P} \right] dP = dt$$

Integrando

$$25 \left[\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{400 - P} dP \right] = \int dt$$
$$25 \ln(P) - 25 \ln(400 - P) = t + c_1$$
$$\ln \left(\frac{P}{400 - P} \right) = \frac{t}{25} + c_2$$
$$\frac{P}{400 - P} = c_3 e^{\frac{t}{25}}$$
$$P = 400 c_3 e^{\frac{t}{25}} - P c_3 e^{\frac{t}{25}}$$
$$P \left(1 + c_3 e^{\frac{t}{25}} \right) = 400 c_3 e^{\frac{t}{25}}$$
$$\Rightarrow P = \frac{400 c_3 e^{\frac{t}{25}}}{1 + c_3 e^{\frac{t}{25}}}$$
$$= \frac{400}{\frac{1}{c_3} e^{-\frac{t}{25}} + 1}.$$

Por la condición inicial $P(0) = 2$ se tiene que

$$2 = \frac{400}{\frac{1}{c_3} + 1} \Rightarrow \frac{1}{c_3} = 199$$

Por tanto, la ecuación de la cantidad de cuyes es:

$$P(t) = \frac{400}{1 + 199 e^{-\frac{t}{25}}}$$

Problema 2 (6 puntos)

Se vierte salmuera con una concentración de $0,05 \frac{kg}{l}$ y a una rapidez de $6 \frac{l}{min}$ a un tanque que contenía originalmente 400 litros de agua pura y se deja que la mezcla salga con la misma rapidez. Después de 20 minutos, se detiene completamente este proceso. Luego, se vierte agua limpia en el tanque a rapidez de $6 \frac{l}{min}$, dejando salir la mezcla con la misma rapidez.

- a) **(2 puntos)** Para el primer proceso (20 primeros minutos), modele la ecuación diferencial de la cantidad de sal respecto al tiempo, indique las variables involucradas y sus unidades.

Solución:

t : tiempo (min)

$x(t)$: cantidad de sal en el tanque en el tiempo t (kg)

$$\frac{dx}{dt} = 6(0,05) - 6\left(\frac{x}{400}\right) \quad ; \quad x(0) = 0. \quad (2)$$

- b) **(2 puntos)** Determine la cantidad de sal a los primeros 20 minutos y use ese valor como dato inicial del siguiente proceso.

Solución:

Resolvemos la ecuación (2)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{200}x = \frac{3}{10}. \quad (3)$$

Para resolver esta ecuación buscamos el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{3}{200} dt} = e^{\frac{3}{200}t},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{\frac{3}{200}t}x &= \int \frac{3}{10} e^{\frac{3}{200}t} dt \\ e^{\frac{3}{200}t}x &= \frac{3}{10} \left(\frac{200}{3} \right) e^{\frac{3}{200}t} + c_1 \\ \Rightarrow x &= 20 + c_1 e^{-\frac{3}{200}t}. \end{aligned}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 0$, se obtiene que $c_1 = -20$. En consecuencia, la solución de la ecuación (2) resulta ser

$$x(t) = 20 - 20e^{-\frac{3}{200}t}.$$

Por lo tanto

$$x(20) = 5,184 \text{ kg}$$

- c) **(2 puntos)** Determine la cantidad de sal a los 30 minutos (10 minutos después de iniciar el segundo proceso).

Solución:

A partir del minuto 20 la ecuación diferencial que calcula la cantidad de sal en el tanque es

$$\frac{dx}{dt} = -6\left(\frac{x}{400}\right) \quad ; \quad x(0) = 5,184. \quad (4)$$

Resolviendo obtendremos

$$x(t) = Ce^{-\frac{3}{200}t}$$

Usando la condición inicial tenemos

$$x(0) = C = 5,184$$

Luego

$$x(t) = 5,184e^{-\frac{3}{200}t}$$

Por lo tanto

$$x(10) = 4,462 \text{ kg}$$

Problema 3 (8 puntos)

Se analizó un circuito eléctrico y se determinó que la ecuación diferencial que define la carga respecto al tiempo es la siguiente:

$$\frac{1}{2}q'' + 20q' + 2000q = 0$$

- a) **(3 puntos)** Resuelva la ED y determine la carga respecto al tiempo. Considere los siguientes datos iniciales: $q(0) = 1$, $q'(0) = 0$.

Solución:

La ecuación auxiliar es:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r^2 + 20r + 2000 &= 0 \\ r^2 + 40r + 4000 &= 0\end{aligned}$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned}r_{1,2} &= \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4(4000)}}{2} \\ r_{1,2} &= \frac{-40 \pm 120i}{2} \\ r_{1,2} &= -20 \pm 60i\end{aligned}$$

luego las raíces serán: $r_1 = -20 + 60i$, $r_2 = -20 - 60i$. La solución será:

$$q(t) = c_1 e^{-20t} \cos(60t) + c_2 e^{-20t} \sin(60t), \quad (5)$$

derivando

$$q'(t) = (-20c_1 + 60c_2)e^{-20t} \cos(60t) - (60c_1 + 20c_2)e^{-20t} \sin(60t) \quad (6)$$

Usando las condiciones iniciales y las ecuaciones (5) y (6), se obtiene

$$\begin{aligned}c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1/3.\end{aligned}$$

Finalmente, la solución del sistema es

$$q(t) = e^{-20t} \cos(60t) + \frac{1}{3}e^{-20t} \sin(60t)$$

- b) **(3 puntos)** Suponga que ahora la fuente es otra, haciendo que la ecuación diferencial cambie: $\frac{1}{2}q'' + 20q' + 2000q = e^{2t} + t^2 + 4$. Encuentra la **SOLUCIÓN PARTICULAR** q_p de esta nueva ecuación diferencial.

Solución : Por coeficientes indeterminados, la solución particular será de la forma:

$$q_p = Ae^{2t} + Bt^2 + Ct + D$$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}q'' + 20q' + 2000q = e^{2t} + t^2 + 4$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(4Ae^{2t} + 2B) + 20(2Ae^{2t} + 2Bt + C) + 2000(Ae^{2t} + Bt^2 + Ct + D) &= e^{2t} + t^2 + 4 \\ 2042Ae^{2t} + 2000Bt^2 + (40B + 2000C)t + (B + 20C + 2000D) &= e^{2t} + t^2 + 4 \end{aligned}$$

de dónde obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 2042A &= 1, \\ 2000B &= 1, \\ 40B + 2000C &= 0, \\ B + 20C + 2000D &= 4. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2042}, \\ B &= \frac{1}{2000} = 5 \times 10^{-4}, \\ C &= -\frac{1}{100000} = -1 \times 10^{-5}, \\ D &= \frac{3,9997}{2000} = 1,99985 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Así, la solución particular de nuestra ecuación es:

$$q_p(t) = \frac{1}{2042}e^{2t} + 5 \times 10^{-4}t^2 - 1 \times 10^{-5}t + 1,99985 \times 10^{-3} \quad (7)$$

- c) **(2 puntos)** Ahora imaginando que los dispositivos pudieran ser variables en el tiempo, resuelva esta nueva ED de coeficientes variables: $t^2q'' + tq' - 9q = 0$ con las condiciones siguientes: $q(1) = 2$ y $q(2) = \frac{65}{8}$

Solución:

Esta es una ecuación de Cauchy-Euler. La solución general del sistema viene dado por:

$$\begin{aligned} q &= t^m \\ q' &= mt^{m-1} \\ q'' &= m(m-1)t^{m-2} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} t^2 [m(m-1)t^{m-2}] + t [mt^{m-1}] - 9[t^m] &= 0 \\ t^m [m(m-1) + m - 9] &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m(m-1) + m - 9 &= 0 \\ m^2 - 9 &= 0 \\ m_1 &= 3 \\ m_2 &= -3 \end{aligned}$$

Entonces la solución es:

$$q = c_1 t^3 + c_2 t^{-3} \quad (8)$$

Usando las condiciones de frontera y la ecuación (8) se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 2 \\ 8c_1 + \frac{1}{8}c_2 &= \frac{65}{8} \end{cases}$$

de donde

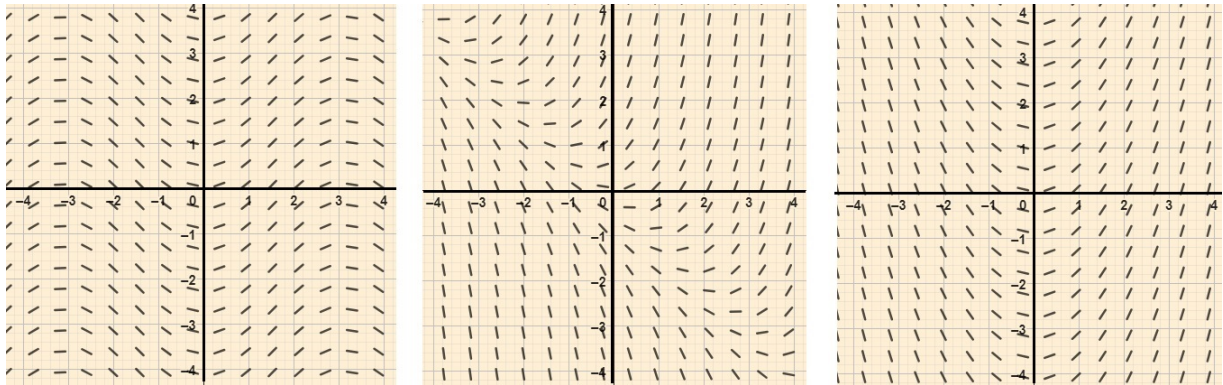
$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución de la ecuación es:

$$q(t) = t^3 + t^{-3}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

- 1) (1.5 puntos) ¿Cuál de las siguientes 3 gráficos de campo de direcciones representa la ecuación diferencial: $y' = x^2$? Escoge el campo de direcciones de la ecuación mencionada y traza 2 soluciones siguiendo el campo de direcciones. Justifique su elección.



Solución :

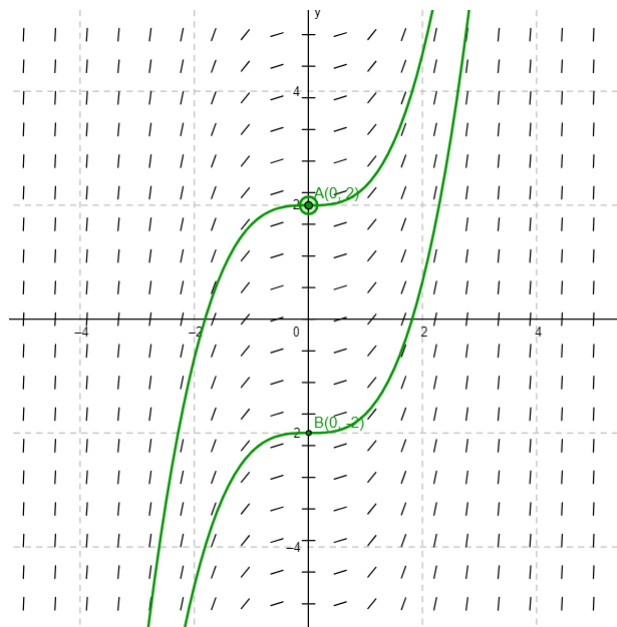
Podemos solucionar la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

por separación de variables. Resultado

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c$$

En la siguiente figura se muestra las curvas considerando las condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y(0) = 2$:



Por lo tanto, *ninguno* de los campos de direcciones mostrados representa a la ecuación $\frac{dy}{dx} = x^2$.

- 2) (1.5 puntos) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y'' + 2y + x' - 2x &= 3t^2 \\ 2y' + y - x' &= 0 \end{aligned}$$

Expresa las ecuaciones en términos del operador diferencial " D ". Multiplique convenientemente arriba y abajo para eliminar la variable x y formar una única ecuación diferencial en términos de y , exprese esta nueva ecuación diferencial.

Solución : Expresando las EDs en términos del operador diferencial D .

$$D^2[y] + 2[y] + D[x] - 2[x] = 3t^2 \quad (9)$$

$$2D[y] + [y] - D[x] = 0 \quad (10)$$

Multiplicando la ecuación (9) por D y la ecuación (10) por $(D - 2I)$ se tiene

$$D(D^2 + 2I)[y] + D(D - 2I)[x] = 6t \quad (11)$$

$$(D - 2I)(2D + I)[y] - (D - 2I)D[x] = 0 \quad (12)$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$(D^3 + 2D + 2D^2 - 3D - 2I)[y] = 6t$$

$$\Rightarrow (D^3 + 2D^2 - D - 2I)[y] = 6t$$

Por lo que la nueva ecuación diferencial es

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 6t.$$