

Apellidos, Nombres:

Sección:

Indicaciones

1. Escribir *claramente* su **Apellidos, Nombres** (*en este orden y separado por la coma*) dentro del recuadro de arriba.
2. En la última página tienen un formulario. En la penúltima página tienen un espacio para usar de borradores. (Lo escrito en dicha página no contará para la calificación.)
3. Cada pregunta tiene un **espacio designado para su resolución**. *No se calificarán respuestas con exceso de desorden o escritas fuera de dicho espacio.*
4. **NO DESGLOSAR** las hojas del examen.
5. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora científica (no programable ni graficadora).
6. Resolver el examen con **lapicero azul o negro**. Si resuelve con lápiz pierde derecho a reclamo. En caso escriba con lápiz *presionar con fuerza* para que se note en el escaneo.
7. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

Problema 1 (3 puntos)

Una masa de 1.5 kg cuelga de un resorte vertical cuya longitud natural es de 2 m. El extremo superior del resorte está fijo al techo. Al colocar la masa y dejar que el sistema alcance la **posición de equilibrio (P.E.)** bajo la acción de la gravedad ($g = 10 \text{ m/s}^2$), la masa queda situada a 5 m por debajo del techo.

A continuación, se realiza un experimento utilizando este mismo sistema pero sumergido completamente en agua, donde inicialmente la masa se suelta desde el reposo desde una posición 1 m por debajo del P.E.

Si definimos $y(t)$ como el desplazamiento de la masa respecto de la P.E. (y considerando la dirección hacia abajo como positiva) entonces, por la 2da ley de Newton, tenemos que

$$my'' = -F_{\text{resistencia del agua}} - F_{\text{resorte}}.$$

Si sabe que el agua ofrece una fuerza de resistencia numéricamente igual a cuatro veces el **cubo** de la velocidad de la masa, complete lo siguiente:

1.1) Calcule el **valor numérico** de la constante elástica del resorte $k =$.

1.2) Escriba las fórmulas explícitas de las fuerzas involucradas en términos de y . (OJO: usar los datos numéricos provistos.)

$$F_{\text{resistencia del agua}} =$$

$$F_{\text{resorte}} =$$

1.3) Indique las **condiciones iniciales (C.I.)**:

Otro sistema masa–resorte está descrito por la ecuación diferencial con C.I.:

$$y'' + 4y' + 4y = 7 \cos t - \sin t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

1.4) Indique si el sistema es *sobre* (A), *críticamente* (B), o *sub* amortiguado (C): B. Justifique

su respuesta: $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.

Problema 2 (6 puntos)

Un ckto RLC en paralelo está conectado a una fuente de voltaje directo (VDC), tal como se ve en la Figura 1. Para este caso, considera: $L = 1$ H, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$ y $C = 1$ F. La fuente VDC es de 30 V. Inicialmente el capacitor está completamente descargado y no hay corrientes.

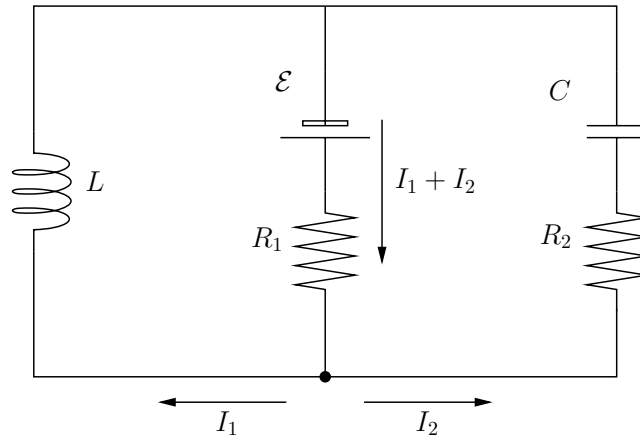


Figura 1: Esquema de un RLC con fuente.

Debido a un corto ckto la fuente VDC deja de suministrar energía al ckto al segundo de haber sido conectada, de tal manera que el comportamiento del sistema puede escribirse como:

$$(I_1 + I_2)R_1 + L\dot{I}_1 = \begin{cases} \mathcal{E}_0 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

$$L\dot{I}_1 - I_2R_2 - \frac{q}{C} = 0, \quad I_2 = \dot{q}.$$

$$(I_1 + I_2)R_1 + I_2R_2 + \frac{q}{C} = \begin{cases} \mathcal{E}_0 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

2.1) **Escribir la expresión de la fuente VDC** en términos de la función paso unitario. [OJO: utilizar el valor numérico explícito de $\mathcal{E}_0$]:

$$\mathcal{E}(t) = \boxed{30(1 - u(t - 1))}$$

- 2.2) Usando la fórmula hallada en el ítem anterior, **reescribir** la 1era y 2da ecuación diferencial únicamente en términos de las incógnitas $I_1 = I_1(t)$ y $q = q(t)$. [OJO: reemplazar los valores numéricos de los coeficientes.]

$$\text{1era ec.: } \boxed{2I_1 + 2\dot{q} + \dot{I}_1 = 30(1 - u(t - 1))}.$$

$$\text{2da ec.: } \boxed{\dot{I}_1 - \dot{q} - q = 0}.$$

- 2.3) **Escribir las condiciones iniciales** del sistema anterior: $I_1(0) = 0$ y $q(0) = 0$.

- 2.4) Nos planteamos resolver el sistema anterior usando la transformada de Laplace. Para esto, primero

$$\text{calcule la transformada de la fuente: } \mathcal{L}\{\mathcal{E}(t)\}(s) = \boxed{\frac{30(1 - e^{-s})}{s}}.$$

- 2.5) Denotemos $\mathcal{L}\{I_1(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{q(t)\} = Q(s)$. Al aplicar la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales llegamos a un sistema de ecuaciones algebraicas en términos de $Y(s)$ y $Q(s)$. Después de despejarlos obtenemos

$$Y(s) = \frac{10(1 - e^{-s})(s + 1)}{s \left(\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12} \right)} \quad \text{y} \quad Q(s) = \frac{10(1 - e^{-s})}{\left(\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12} \right)}.$$

Para obtener las soluciones del ckto RLC de I_1 y q , aplicamos la transformada inversa de Laplace a $Y(s)$ y $Q(s)$. Para facilitar el cálculo, podemos descomponer las funciones de la siguiente manera:

$$Y(s) = F(s) - e^{-s}F(s) \quad \text{y} \quad Q(s) = G(s) - e^{-s}G(s), \quad (1)$$

donde

$$F(s) = \frac{15}{s} - \frac{15 \left(s + \frac{1}{2} \right)}{\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12}} + \frac{\frac{5}{2}}{\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12}} \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{10}{\left(\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12} \right)}$$

Sean $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$ y $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t)$. **Escribir la fórmula** de $I_1(t)$ en términos de $f(t)$, y la fórmula de $q(t)$ en términos de $g(t)$:

$$I_1(t) = \boxed{f(t) - u(t - 1)f(t - 1)}$$

$$q(t) = \boxed{g(t) - u(t - 1)g(t - 1)}$$

- 2.6) Para finalizar, solo queda calcular $f(t)$ y $g(t)$:

Calcular la transformada inversa de Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{15}{s} - \frac{15 \left(s + \frac{1}{2} \right)}{\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12}} + \frac{\frac{5}{2}}{\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12}} \\ &= \frac{15}{s} - \frac{15 \left(s + \frac{1}{2} \right)}{\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{6} \right)^2} + \frac{\sqrt{15} \left(\frac{\sqrt{15}}{6} \right)}{\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{6} \right)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando las transformadas inversas básicas y el teorema de traslación,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\} = e^{-at} \cos(\omega t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\} = e^{-at} \sin(\omega t),$$

con

$$a = \frac{1}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

se obtiene

$$f(t) = 15 - 15e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}t\right) + \sqrt{15}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}t\right).$$

Calcular la transformada inversa de Laplace $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t)$:

$$G(s) = \frac{10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{12}} = \frac{10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2} = \frac{4\sqrt{15} \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2}.$$

Aplicando la transformada inversa básica y el teorema de traslación,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right\} = e^{-at} \sin(\omega t),$$

con

$$a = \frac{1}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

se obtiene

$$g(t) = 4\sqrt{15}e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}t\right).$$

Problema 3 (6 puntos)

3.1) Considerar la siguiente función definida por partes.

$$f(t) = \begin{cases} 4e^{2t}, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & 1 \leq t < 3 \\ \sin(t-3) + t^2, & 3 \leq t \end{cases}$$

Escribir la función en términos de la función escalón unitario:

$$f(t) = 4e^{2t} + (t^2 - 4e^{2t})u(t-1) + \sin(t-3)u(t-3).$$

Halle su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{4e^{2t}\} + \mathcal{L}\{(t^2 - 4e^{2t})u(t-1)\} + \mathcal{L}\{\sin(t-3)u(t-3)\}.$$

Para el primer término,

$$\mathcal{L}\{4e^{2t}\} = \frac{4}{s-2}.$$

Para el segundo término, se escribe la función en términos de $t-1$:

$$\begin{aligned} t^2 - 4e^{2t} &= (t-1+1)^2 - 4e^{2(t-1)}e^2 \\ &= (t-1)^2 + 2(t-1) + 1 - 4e^2e^{2(t-1)}. \end{aligned}$$

Por el segundo teorema de traslación,

$$\mathcal{L}\{(t^2 - 4e^{2t})u(t-1)\} = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{4e^2}{s-2} \right).$$

Para el tercer término,

$$\sin(t-3)u(t-3) = u(t-3)g(t-3), \quad g(t) = \sin t.$$

Aplicando el segundo teorema de traslación,

$$\mathcal{L}\{\sin(t-3)u(t-3)\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{e^{-3s}}{s^2+1}.$$

Finalmente,

$$F(s) = \frac{4}{s-2} + e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{4e^2}{s-2} \right) + \frac{e^{-3s}}{s^2+1}.$$

3.2) Halle la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{(s^2 - 1)(s^2 - 2s)}$$

1era forma de solución

Se propone la siguiente descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{s^2 + 1}{(s^2 - 1)(s^2 - 2s)} = \frac{As + B}{s^2 - 1} + \frac{Cs + D}{s^2 - 2s}.$$

Multiplicando por el denominador común y expandiendo,

$$s^2 + 1 = (As + B)(s^2 - 2s) + (Cs + D)(s^2 - 1),$$

$$s^2 + 1 = (A + C)s^3 + (B - 2A + D)s^2 + (-2B - C)s - D.$$

Igualando coeficientes se obtiene el sistema

$$A + C = 0, \quad B - 2A + D = 1, \quad -2B - C = 0, \quad -D = 1,$$

cuya solución es

$$A = -\frac{4}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = \frac{4}{3}, \quad D = -1.$$

Así,

$$F(s) = -\frac{4}{3} \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s^2 - 1} + \frac{\frac{4}{3}s - 1}{s^2 - 2s}.$$

Para el último término se completa cuadrados:

$$s^2 - 2s = (s - 1)^2 - 1,$$

y además

$$\frac{4}{3}s - 1 = \frac{4}{3}(s - 1) + \frac{1}{3}.$$

Por tanto,

$$F(s) = -\frac{4}{3} \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s^2 - 1} + \frac{4}{3} \frac{s - 1}{(s - 1)^2 - 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(s - 1)^2 - 1}.$$

Aplicando las transformadas inversas conocidas

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - a^2}\right\} = \cosh(at), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sinh(at),$$

junto con el primer teorema de desplazamiento,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - a}{(s - a)^2 - b^2}\right\} = e^{at} \cosh(bt), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - a)^2 - b^2}\right\} = e^{at} \sinh(bt),$$

se obtiene

$$f(t) = -\frac{4}{3} \cosh t - \frac{2}{3} \sinh t + \frac{4}{3} e^t \cosh t + \frac{1}{3} e^t \sinh t.$$

2da forma de solución

Primero, factorizamos el denominador:

$$s^2 - 1 = (s - 1)(s + 1), \quad s^2 - 2s = s(s - 2).$$

Así,

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{(s - 1)(s + 1)s(s - 2)}.$$

Como el denominador está completamente factorizado en factores lineales distintos, por el **método de fracciones parciales** existen constantes A, B, C, D tales que

$$\frac{s^2 + 1}{(s - 1)(s + 1)s(s - 2)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s - 2}.$$

Multiplicando ambos lados por $(s - 1)(s + 1)s(s - 2)$, se obtiene

$$s^2 + 1 = A(s + 1)s(s - 2) + B(s - 1)s(s - 2) + C(s - 1)(s + 1)(s - 2) + D(s - 1)(s + 1)s.$$

Para hallar A , evaluamos la identidad en $s = 1$:

$$\begin{aligned} 2 &= A(2)(1)(-1), \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Los coeficientes restantes se obtienen de forma análoga, resultando

$$B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{5}{6}.$$

Por lo tanto,

$$F(s) = -\frac{1}{s - 1} - \frac{1}{3(s + 1)} + \frac{1}{2s} + \frac{5}{6(s - 2)}.$$

Finalmente, aplicando la **linealidad de la transformada inversa de Laplace** y las fórmulas básicas

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 2}\right\} \\ &= -e^t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}e^{2t}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = -e^t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}e^{2t}.$$

Problema 4 (5 puntos)

El modelo depredador-presa de Lotka–Volterra describe la evolución temporal de una población de presas $x(t)$ y depredadores $y(t)$ en un ecosistema cerrado. Un modelo simplificado está dado por el sistema

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + exy, \end{cases} \quad a, b, c, e > 0.$$

Definiendo $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ y $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + exy \end{pmatrix}$, el sistema de arriba es equivalente a la EDO matricial $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.

Para estudiar el comportamiento de una trayectoria que pasa cerca del punto de equilibrio (P.E.)

$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} c/e \\ a/b \end{pmatrix}$, se aproxima $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ mediante su expansión de Taylor de primer orden,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx J(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0),$$

donde $J(x, y)$ es el Jacobiano de $\mathbf{F}(\mathbf{X})$,

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Si definimos la variable desplazada $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$, la **EDO linealizada alrededor de $\mathbf{X}_0$** es

$$\mathbf{U}' = J(\mathbf{X}_0)\mathbf{U}. \quad (2)$$

cuyas trayectorias aproximan localmente las trayectorias del sistema no lineal.

4.1) (1 pts) Calcule el Jacobiano en un vector $\mathbf{X}$ arbitrario y también en el P.E. $\mathbf{X}_0$:

$$J(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ ey & -c + ex \end{pmatrix}, \quad J(\mathbf{X}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{e} \\ \frac{ae}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

4.2) (1 pts) Re-escriba la EDO matricial (ecuación 2) como un sistema de dos EDOs sobre las variables u y v :

$$\text{1era ec.:} \quad \boxed{u' = -\frac{bc}{e} v}$$

$$\text{2da ec.:} \quad \boxed{v' = \frac{ae}{b} u}$$

4.4) (2.5 pts) En cierto modelo depredador–presa de Lotka–Volterra se tiene la siguiente EDO (después de linealización):

$$\mathbf{U}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{U}.$$

Resuelva la EDO matricial de arriba utilizando el **método de autovalores y autovectores**.

Solución: Sea

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},$$

de modo que el sistema se escribe como

$$\mathbf{U}' = A\mathbf{U}.$$

Paso 1. Hallar los autovalores.

Los autovalores se obtienen resolviendo

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Así,

$$\det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 2 \\ 3 & -5 - \lambda \end{pmatrix} = (-4 - \lambda)(-5 - \lambda) - 6 = \lambda^2 + 9\lambda + 14.$$

Por tanto,

$$\lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda + 7)(\lambda + 2) = 0,$$

de donde

$$\boxed{\lambda_1 = -7, \quad \lambda_2 = -2.}$$

Paso 2. Hallar un autovector para $\lambda_1 = -7$.

Se resuelve

$$(A + 7I)\mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Como

$$A + 7I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

el sistema se reduce a

$$3k_1 + 2k_2 = 0,$$

es decir,

$$k_2 = -\frac{3}{2}k_1.$$

Tomando $k_1 = 2$, se obtiene $k_2 = -3$. Así, un autovector asociado es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

y la solución correspondiente es

$$\mathbf{U}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-7t}.$$

Paso 3. Hallar un autovector para $\lambda_2 = -2$.

Se resuelve

$$(A + 2I)\mathbf{K} = \mathbf{0}.$$

Como

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},$$

el sistema se reduce a

$$-k_1 + k_2 = 0,$$

es decir,

$$k_2 = k_1.$$

Tomando $k_1 = 1$, se obtiene $k_2 = 1$. Así, un autovector asociado es

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la solución correspondiente es

$$\mathbf{U}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Paso 4. Escribir la solución general.

Como los autovalores son distintos, los autovectores asociados son linealmente independientes. Por tanto,

$$\mathbf{U}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-7t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

En forma componente,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-2t}, \\ u_2(t) &= -3C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-2t}. \end{aligned}$$

4.5) (0.5 pts) Utilizando la solución obtenida en el inciso anterior, determine

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Justifique su respuesta: Las exponenciales con exponente negativo tienden a cero.

Adicional (3 puntos)

IMPORTANTE: Responder las siguientes preguntas de manera concisa, con buena redacción, y escribir de forma ordenada y completamente legible:

5.1) (1.5 pts) Considere el CR3BP. Si la partícula está posicionada sobre uno de los puntos de Lagrange entonces, a parte de la posición misma de la partícula en el marco de referencia rotacional, ¿qué cantidades principales asociadas al sistema se mantienen constantes a través del tiempo?:

La constante de Jacobi C_J y la energía mecánica $\mathcal{L}$.

Justifique su respuesta:

Porque $d\mathcal{L}/dt = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$. Por otro lado, si la trayectoria de la partícula es circular desde el punto de vista del marco referencial inercial, entonces $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0$.

5.2) (1.5 pts) Explique brevemente (en tres líneas) su proyecto ABP y los resultados que obtuvo con su grupo.

Borradores: Puede usar esta página como borradores. *Nada de lo escrito aquí será considerado para la calificación de su examen.*

1. Leyes de Newton

- Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme mientras la fuerza neta que actúa sobre él sea nula.
- La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, inversamente proporcional a su masa, y tiene la misma dirección que dicha fuerza.
- Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este ejerce simultáneamente sobre el primero una fuerza de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario.

2. Leyes de Kirchhoff

- Ley de nodos:** En cualquier nodo, la suma de las corrientes que entran en ese nodo es igual a la suma de las corrientes que salen.
- Ley de las tensiones:** En un circuito cerrado, la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada.

3. Caídas de voltaje

- Para una resistencia: $V = RI$
- Para una bobina: $V = L \frac{dI}{dt}$
- Para un condensador: $V = \frac{Q}{C}$
- En general: $I = \frac{dQ}{dt}$

4. **Fraciones Parciales.** Un cuadrático irreducible es un polinomio $as^2 + bs + c$ que no se puede factorizar sobre los números reales (es decir, no tiene raíces reales).

a) **Producto de factores lineales.** Si grado $P(s) \leq n - 1$, entonces

$$\frac{P(s)}{(s - a_1)(s - a_2) \dots (s - a_n)} = \frac{A_1}{s - a_1} + \frac{A_2}{s - a_2} + \dots + \frac{A_n}{s - a_n}.$$

b) **Lineal $\times$ cuadrático irreducible.** Si grado $P(s) \leq 2$ y $as^2 + bs + c$ es irreducible, entonces

$$\frac{P(s)}{(s - d)(as^2 + bs + c)} = \frac{A}{s - d} + \frac{Bs + C}{as^2 + bs + c}.$$

c) **Producto con potencias de s y un cuadrático irreducible.** Si grado $P(s) \leq n + 1$ y $Q(s) = as^2 + bs + c$ es cuadrático irreducible, entonces

$$\frac{P(s)}{s^n Q(s)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \dots + \frac{A_n}{s^n} + \frac{Bs + C}{Q(s)}.$$

d) **Producto de dos cuadráticos irreducibles.** Si grado $P(s) \leq 3$ y los polinomios cuadráticos son irreducibles, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{P(s)}{(a_1s^2 + b_1s + c_1)(a_2s^2 + b_2s + c_2)} \\ &= \frac{A_1s + B_1}{a_1s^2 + b_1s + c_1} + \frac{A_2s + B_2}{a_2s^2 + b_2s + c_2}. \end{aligned}$$

5. Las raíces de la ecuación cuadrática

$ar^2 + br + c = 0$ están dadas por

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. Coeficientes indeterminados

$g(x)$	$y_p(x)$
1 (cualquier constante)	A
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$\sin(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
$\cos(4x)$	$A \sin(4x) + B \cos(4x)$
e^{5x}	Ae^{5x}
$x^2 e^{7x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{7x}$
$e^{3x} \sin(8x)$	$Ae^{3x} \sin(8x) + Be^{3x} \cos(8x)$

7. Tabla de transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t + a)\}$
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as} F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$

8. Transformada de Laplace de una derivada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) \\ &\quad - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$