

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 Puntos)

A un resorte que cuelga del techo, se le une una masa de 1 kg el cual alarga el resorte 2 m . Si la masa se libera 1 m por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2 m/s en un medio circundante que ofrece una fuerza amortiguadora igual a 6 veces su velocidad instantánea.

- (a) (3 pts) Determine la ecuación diferencial que modela el problema masa-resorte, si se aplica una fuerza externa $f(t) = 5\cos(3t)$ e indicar las condiciones iniciales. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Solución: Primero calculemos la constante de elasticidad asociada al resorte, para ello usamos la ley de Hooke en la posición de equilibrio:

$$k \cdot 2 = 1 \cdot 10$$

La ecuación diferencial que modela el desplazamiento de la masa es:

$$x'' + 6x' + 5x = 5\cos(3t),$$

donde $x(0) = 1, x'(0) = -2$.

- (b) (3 pts) Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' - 2x' + 2x = \sin(t)$$

sujeto a las siguientes condiciones iniciales

$$x(0) = 0,4, \quad x'(0) = 0$$

Solución: Primero calculamos la solución homogénea, para ello debemos resolver la ecuación característica:

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$(r - 1)^2 + 1 = 0$$

Luego, las raíces son $r_{1,2} = 1 \pm i$ y así solución homogénea es:

$$x_h(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t)$$

Para la solución particular, utilizaremos el método de coeficientes indeterminados. Para ello, en base a la forma del término no homogéneo, proponemos $x_p(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$, luego:

$$x_p'(t) = -A \sin(t) + B \cos(t)$$

$$x_p''(t) = -A \cos(t) - B \sin(t)$$

Reemplazando en la EDO del problema, tenemos:

$$(-A - 2B + 2A) \cos(t) + (-B + 2A + 2B) \sin(t) = \sin(t)$$

$$(A - 2B) \cos(t) + (2A + B) \sin(t) = \sin(t)$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$A - 2B = 0$$

$$2A + B = 1$$

Resolviendo, $A = \frac{2}{5}$ y $B = \frac{1}{5}$, tenemos la solución general:

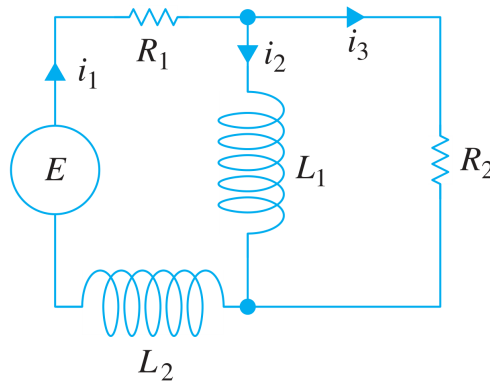
$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= C_1 e^t \cos(t) + C_2 t \sin(t) + \frac{2}{5} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t) \end{aligned}$$

Además, como $x(0) = \frac{2}{5}$, $x'(0) = 0$, entonces $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{5}$. Finalmente:

$$x(t) = -\frac{1}{5}t \sin(t) + \frac{2}{5} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t)$$

Problema 2 (6 Puntos)

Considere el circuito mostrado en la siguiente figura:



- (a) (**3 pts**) Modele las ecuaciones diferenciales en la malla derecha e izquierda que permitan encontrar las corrientes $I_1(t)$ y $I_2(t)$. Seguidamente, exprese el sistema de ecuaciones diferenciales en la forma $\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + b$, donde $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix}$.

Solución: Usaremos las leyes de Kirchoff en la sub-malla *izquierda* y en la sub-malla de la derecha, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} E(t) &= i_1 R_1 + L_1 i_2' + L_2 i_1' \\ 0 &= L_1 i_2' - i_3 R_2 \end{aligned}$$

Además, por la ley de nodos, tenemos $i_3 = i_1 - i_2$.

$$\begin{aligned} E(t) &= i_1 R_1 + L_1 i_2' + L_2 i_1' \\ 0 &= L_1 i_2' - i_1 R_2 + i_2 R_2 \end{aligned}$$

Luego despejando las derivadas y agrupando términos tenemos:

$$\begin{aligned} i_1' &= -\left(\frac{R_1 + R_2}{L_2}\right)i_1 + \frac{R_2}{L_2}i_2 + \frac{E(t)}{L_2} \\ i_2' &= \frac{R_2}{L_1}i_1 - \frac{R_2}{L_1}i_2 \end{aligned}$$

Ahora, lo expresamos matricialmente:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -(R_1 + R_2)/L_2 & R_2/L_2 \\ R_2/L_1 & -R_2/L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(t)/L_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (b) (**3 pts**) Utilizando transformada de Laplace, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}x'' &= 2x' - x - y \\ 2y' &= -x - y \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0\end{aligned}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) &= 2(sX(s) - x(0)) - X(s) - Y(s) \\ 2(sY(s) - y(0)) &= -X(s) - Y(s)\end{aligned}$$

Reemplazamos las condiciones iniciales y reagrupamos términos:

$$\begin{aligned}(s^2 - 2s + 1)X(s) + Y(s) &= 1 \\ X(s) + (2s + 1)Y(s) &= 0\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2s + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 - 2s + 1 & 1 \\ 1 & 2s + 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{2s + 1}{2s^3 - 3s^2} = \frac{2s + 1}{s^2(2s - 3)}\end{aligned}$$

Descomponemos $X(s)$ en fracciones parciales:

$$\frac{2s + 1}{s^2(2s - 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{2s - 3}$$

Entonces:

$$2s + 1 = As(2s - 3) + B(2s - 3) + Cs^2$$

Evaluando en $s = 0$, $s = \frac{3}{2}$ y $s = 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}1 &= -3B \\ 4 &= \frac{9}{4}C \\ 3 &= -A - B + C\end{aligned}$$

Así, $A = -\frac{8}{9}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{16}{9}$. Finalmente:

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{8/9}{s} - \frac{1/3}{s^2} + \frac{16/9}{2s - 3}\right\} \\ x(t) &= \boxed{-\frac{8}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{8}{9}e^{\frac{3}{2}t}}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s^2 - 2s + 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 - 2s + 1 & 1 \\ 1 & 2s + 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-1}{2s^3 - 3s^2} = \frac{-1}{s^2(2s - 3)}\end{aligned}$$

Descomponemos $Y(s)$ en fracciones parciales:

$$\frac{-1}{s^2(2s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{2s-3}$$

Es decir:

$$-1 = As(2s-3) + B(2s-3) + Cs^2$$

Nuevamente evaluando en $s=0$, $s=\frac{3}{2}$, $s=1$, obtenemos:

$$-1 = -3B$$

$$-1 = \frac{9}{4}C$$

$$-1 = -A - B + C$$

Resolviendo $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = -\frac{4}{9}$, luego:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2/9}{s} + \frac{1/3}{s^2} - \frac{4/9}{2s-3} \right\}$$

$$y(t) = \boxed{\frac{2}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}e^{\frac{3}{2}t}}$$

Problema 3 (8 Puntos)

(a) **(2 pts)** Resolver el problema de valor inicial

$$y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

utilizando el método de la transformada de Laplace.

Sugerencia:

$$\frac{1}{s^2(s-3)^2} = \frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} - \frac{2/27}{s-3} + \frac{1/9}{(s-3)^2}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace a la EDO planteada:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Reemplazando las condiciones iniciales y agrupando términos:

$$\begin{aligned}(s^2 - 6s + 9)Y(s) &= \frac{1}{s^2} + 1 \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2(s^2 - 6s + 9)} + \frac{1}{s^2 - 6s + 9} \\ &= \frac{1}{s^2(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}\end{aligned}$$

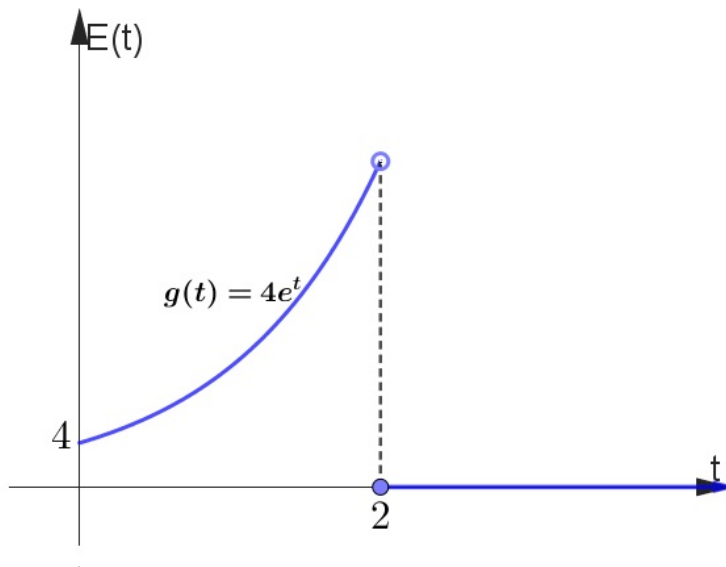
Utilizamos la sugerencia para el primer término de $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} - \frac{2/27}{s-3} + \frac{1/9}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} - \frac{2/27}{s-3} + \frac{1/9}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}\right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} - \frac{2/27}{s-3} + \frac{10/9}{(s-3)^2}\right\} \\
 &= \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{t\}_{s \rightarrow (s-3)}\} \\
 &= \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}e^{3t}t
 \end{aligned}$$

(b) (3 pts) Dada la gráfica de la función $E(t)$, determine: $\mathcal{L}\{E(t)\}$.



Solución: Escribimos la regla de correspondencia de $E : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$E(t) = \begin{cases} 4e^t & , 0 \leq t < 2 \\ 0 & , 2 \leq t \end{cases}$$

Así, podemos expresar $E(t)$ en términos de la función escalón unitario:

$$E(t) = 4e^t - 4e^t\mathcal{U}(t-2)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{E(t)\} &= \mathcal{L}\{4e^t - 4e^t\mathcal{U}(t-2)\} \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{s-1} - 4 \cdot \mathcal{L}\{e^t\mathcal{U}(t-2)\} \\
 &= \frac{4}{s-1} - 4e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{t+2}\} \\
 &= \frac{4}{s-1} - 4 \cdot \frac{e^{-2s+2}}{s-1}
 \end{aligned}$$

(c) (3 pts) Halle la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}$$

Solución: Descomponemos $F(s)$ en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)} &= \frac{2s-4}{s(s+1)(s^2+1)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}\end{aligned}$$

Luego:

$$2s-4 = A(s+1)(s^2+1) + Bs(s^2+1) + (Cs+D)s(s+1)$$

Reemplazando en $s=0$, $s=-1$, $s=1$ y $s=2$:

$$\begin{aligned}-4 &= A \\ -6 &= -2B \\ -2 &= 4A + 2B + 2(C+D) \\ 0 &= 15A + 10B + 6(2C+D)\end{aligned}$$

Resolvemos y obtenemos: $A=-4$, $B=3$, $C=1$, $D=3$. Finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4}{s} + \frac{3}{s+1} + \frac{s+3}{s^2+1}\right\} \\ &= -4 + 3e^{-t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= -4 + 3e^{-t} + \cos(t) + 3\sin(t)\end{aligned}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (1.5 pts) Resuelva el siguiente sistema de ED usando autovalores y autovectores:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t) \end{cases} \quad \text{con } x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 4$$

Solución: Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Calculamos los eigenvalores:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \\ (\lambda-2)(\lambda+1) &= 0\end{aligned}$$

Así, obtenemos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, ahora debemos calcular los eigenvectores asociados:

- Para λ_1 : Sea $v_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ el eigenvector asociado a λ_1 , luego

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, tenemos $k_2 = 0$, luego $v_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, si $k_1 = 1$, nos queda $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ un eigenvector asociado a λ_1 .

- Para λ_2 : Sea $v_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ el eigenvector asociado a λ_2 , luego

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, tenemos $k_1 = -\frac{k_2}{3}$, luego $v_2 = \begin{bmatrix} -k_2/3 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, si $k_2 = 3$, nos queda $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ un eigenvector asociado a λ_2 .

Finalmente

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Usando las condiciones iniciales $x_1(0) = 3, x_2(0) = 4$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo $C_2 = \frac{4}{3}, C_1 = \frac{13}{3}$. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{13}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

- (b) **(1.5 ptos)** Halle la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = te^t \sin(t) + te^t \cos(t)$$

Solución: Calculamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t(e^t \sin(t) + e^t \cos(t))\} &= (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds} [\mathcal{L}\{e^t \sin(t)\} + \mathcal{L}\{e^t \cos(t)\}] \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} \right] \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{s}{(s-1)^2 + 1} \right] \\ &= -\left[\frac{-s^2 + 2}{((s-1)^2 + 1)^2} \right] \\ &= \frac{s^2 - 2}{((s-1)^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

1. Leyes de Kirchhoff

- a) **Ley de nodos:** En cualquier nodo, la suma de las corrientes que entran en ese nodo es igual a la suma de las corrientes que salen.
- b) **Ley de las tensiones:** En un circuito cerrado, la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada.

2. Caídas de voltaje

- Para una resistencia: $V = RI$
- Para una bobina: $V = L \frac{dI}{dt}$
- Para un condensador: $V = \frac{Q}{C}$
- En general: $I = \frac{dQ}{dt}$

3. Transformada de Laplace de una derivada

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

4. Tabla de transformada de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$