

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 Puntos)

- a) El bloque de M kilogramos colocado en el extremo del resorte causa en éste un alargamiento de S metros hasta alcanzar la posición de equilibrio.

En el instante $t = 0$ la masa se libera 1 metro debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 4 metros por segundo y el movimiento posterior toma lugar en un medio circundante que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a C veces la velocidad instantánea. Considere g , la aceleración de la gravedad, en m/s^2 .



- i) (2 ptos) Si una fuerza externa igual a $f(t) = 9t \sin(3t)$ actúa sobre la masa, determinar la ecuación diferencial del movimiento en términos de M , S , C y g e indicar las condiciones iniciales.
- ii) (1 pto) ¿Qué relación debe cumplirse para que el movimiento sea **sobreamortiguado**? Responda en términos de M , S , C y g .
- b) Un sistema masa resorte tiene la siguiente ecuación diferencial

$$x'' + 4x' + 20x = 12 \cos(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,5$$

- i) (2 ptos) Determinar su posición para cualquier instante t . Utilice el método que crea conveniente.
- ii) (1 pto) De la solución general, indicar cuál es la **solución transitoria** y la **solución estable**.

Solución:

- a) En la posición de equilibrio el resorte se alarga S metros, por lo tanto calculamos la constante k del resorte mediante:

$$Mg - kS = 0$$

$$k = \frac{Mg}{S}$$

- i) Considerando la fuerza externa, el peso, la fuerza del resorte y el amortiguamiento, se sigue que el modelo está dado por:

$$Mx'' = f(t) - Cx' - kx$$

$$Mx'' = 9t \sin 3t - Cx' - \frac{Mg}{S}x$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{C}{M}x' + \frac{g}{S}x = \frac{9}{M}t \sin(3t)$$

con condiciones iniciales: $x(0) = 1m$ y $x'(0) = 4m/s$.

- ii) Para que el movimiento sea sobreamortiguado debe cumplirse que $\lambda^2 - w^2 > 0$, donde $\lambda = \frac{C}{2M}$ y $w^2 = \frac{k}{M} = \frac{g}{S}$, es decir:

$$\frac{C^2}{4M^2} > \frac{g}{S}$$

- b) i) Planteamos la ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4r + 20 = 0$$

cuyas raíces son $r_1 = -2 + 4i$ y $r_2 = -2 - 4i$, luego las soluciones homogéneas es:

$$x_h(t) = C_1 e^{-2t} \cos 4t + C_2 e^{-2t} \sin 4t$$

Para hallar la solución particular usamos coeficientes indeterminados, buscando una solución con la forma:

$$x_p = A \cos t + B \sin t$$

que al ser reemplazada en la ecuación diferencial nos da $A = \frac{228}{377}$ y $B = \frac{48}{377}$, por lo tanto la solución general será:

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \cos 4t + C_2 e^{-2t} \sin 4t + \frac{228}{377} \cos t + \frac{48}{377} \sin t$$

finalmente usando las condiciones iniciales se obtienen las constantes

$$C_1 = -\frac{228}{377}$$

y

$$C_2 = -\frac{631}{3016}$$

. Obteniendo

$$x(t) = -\frac{228}{377} e^{-2t} \cos 4t - \frac{631}{3016} e^{-2t} \sin 4t + \frac{228}{377} \cos t + \frac{48}{377} \sin t$$

- ii) Debido a que el término e^{-2t} converge hacia 0 cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$-\frac{228}{377} e^{-2t} \cos 4t - \frac{631}{3016} e^{-2t} \sin 4t$$

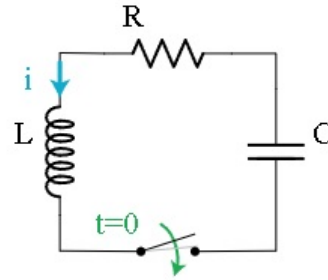
es la **solución transitoria** y

$$\frac{228}{377} \cos t + \frac{48}{377} \sin t$$

la **solución estable**.

Problema 2 (6 Puntos)

- a) Dado el circuito de la figura, se sabe que la inductancia es de 1 henry, la resistencia de 2 ohms y la capacitancia de $\frac{1}{5}$ farad. Además la carga inicial es de 20 coulomb mientras que la corriente inicial es 0. Considere como instante inicial el momento en que se cierra el circuito.



- i) (1 pts) Modele una ecuación diferencial para la carga $q(t)$ e indique las condiciones iniciales.
ii) (2 pts) Concluya qué pasa con la corriente $i(t)$ después de mucho tiempo.
- b) (3 pts) Empleando la transformada de Laplace, resolver el siguiente sistema,

$$\begin{aligned}x' &= x + 4y \\y' &= 5x + 2y \\x(0) &= 6, \quad y(0) = 2\end{aligned}$$

Solución:

- a) i) La ecuación de la carga para un sistema RLC es:

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

reemplazando los valores tenemos:

$$q'' + 2q' + 5q = 0$$

con condiciones iniciales $q(0) = 20$ y $q'(0) = 0$.

- ii) Resolvemos la ecuación planteada en el item anterior. La ecuación auxiliar será:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

cuyas soluciones son $r_1 = -1 + 2i$ y $r_2 = -1 - 2i$; luego la solución general de la ecuación homogénea será:

$$q(t) = C_1 e^{-t} \cos(2t) + C_2 e^{-t} \sin(2t)$$

usando las condiciones iniciales obtenemos que $C_1 = 20$ y $C_2 = 10$, por lo que la carga será:

$$q(t) = 20e^{-t} \cos(2t) + 10e^{-t} \sin(2t)$$

y la corriente:

$$i(t) = q'(t) = -50e^{-t} \sin(2t)$$

de donde se concluye que después de mucho tiempo ($t \rightarrow \infty$) la corriente tiende hacia 0.

- b) Aplicando la transformada de Laplace a ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= X(s) + 4Y(s) \\sY(s) - y(0) &= 5X(s) + 2Y(s)\end{aligned}$$

luego usando las condiciones iniciales y agrupando los términos:

$$\begin{aligned}(s-1)X(s) - 4Y(s) &= 6 \\-5X(s) + (s-2)Y(s) &= 2\end{aligned}\tag{1}$$

multiplicando la primera ecuación por $(s - 2)$ y la segunda por 4 y luego sumando, se obtiene:

$$(s - 2)(s - 1)X(s) - 20X(s) = 6(s - 2) + 8$$

despejando $X(s)$:

$$X(s) = \frac{6s - 4}{(s - 6)(s + 3)} = \frac{22}{9} \frac{1}{s + 3} + \frac{32}{9} \frac{1}{s - 6} \quad (2)$$

tomando la transformada inversa:

$$x(t) = \frac{22}{9}e^{-3t} + \frac{32}{9}e^{6t}$$

reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$-\frac{5(6s - 4)}{(s - 6)(s + 3)} + (s - 2)Y(s) = 2$$

despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(s + 14)}{(s - 6)(s + 3)} = -\frac{22}{9} \frac{1}{s + 3} + \frac{40}{9} \frac{1}{s - 6}$$

tomando la transformada inversa:

$$y(t) = -\frac{22}{9}e^{-3t} + \frac{40}{9}e^{6t}$$

Problema 3 (8 Puntos)

Considere el problema de valor inicial

$$y'' - y' - 6y = \mathcal{U}(t - 2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

- a) (1 pts) Aplique la transformada de Laplace a la ecuación anterior y utilice las condiciones iniciales.
- b) (1 pts) Resuelva para $Y(s)$ (Recordar que $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$).
- c) (4 pts) Halle $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.
- d) (2 pts) Halle la transformada de Laplace de la función $f(t)$, definida como:

$$f(t) = \begin{cases} y(0), & 0 \leq t < 2 \\ t + 2, & 2 \leq t \end{cases}$$

donde $y(0)$ es la evaluación de la solución del ítem anterior en $t = 0$.

Solución:

- a) Tomando la transformada de Laplace:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - [sY(s) - y(0)] - 6Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

usando los valores iniciales:

$$s^2 Y(s) - s + 1 - sY(s) + 1 - 6Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

- b) Despejamos $Y(s)$:

$$(s^2 - s - 6)Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + s - 2$$
$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s-3)(s+2)} + \frac{s-2}{(s-3)(s+2)}$$

- c) Factorizamos en fracciones parciales:

$$Y(s) = -\frac{1}{6} \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{15} \frac{e^{-2s}}{s-3} + \frac{1}{10} \frac{e^{-2s}}{s+2} + \frac{1}{5} \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \frac{1}{s+2}$$

usando la linealidad podemos encontrar la transformada inversa tomando esta en cada término:

$$y(t) = -\frac{1}{6} \mathcal{U}(t-2) + \frac{1}{15} \mathcal{U}(t-2)e^{3t-6} + \frac{1}{10} \mathcal{U}(t-2)e^{-2t+4} + \frac{1}{5} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t}$$

- d) Tenemos que $y(0) = 1$ y la función $f(t)$ puede escribirse como:

$$f(t) = 1 + (t+1)\mathcal{U}(t-2)$$

y su transformada de Laplace será:

$$F(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s} \mathcal{L}\{t+3\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s} \right]$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

1. (1.5 pts) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

2. (1.5 pts) Halle la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Sugerencia: halle la transformada de Laplace de $f(t) = t \cos(t)$.

Solución:

1. Calculamos los valores propios de la matriz:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (2-\lambda)(-2-\lambda) - (3)(-1) &= 0 \\ \lambda^2 &= 1 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

calculamos los vectores propios asociados a cada valor propio:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

de donde tenemos que $(1, 1)^T$ es un vector propio asociado a $\lambda = 1$ y

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

de donde tenemos que $(1, 3)^T$ es un vector propio asociado a $\lambda = -1$. Finalmente la solución general del sistema será:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

2. Usando la formula para la transformada de una expresión del tipo $tf(t)$:

$$\mathcal{L}\{t \cos(t)\} = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos(t)\} = (-1) \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = \frac{-(s^2 + 1 - 2s^2)}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

Sumando y restando 1 del numerador

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cos(t)\} &= \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 + 1 - 2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2} - \frac{2}{(s^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{2}{(s^2 + 1)^2} \\ &= \mathcal{L}\{\sin(t)\} - \frac{2}{(s^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\sin(t)\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{t \cos(t)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} t \cos(t) \right\}$$

Finalmente

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} t \cos(t)$$