

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 Puntos)

Considere un resorte vertical donde el extremo superior está unido a un soporte estable. Al colocar un bloque de 2 kg en el extremo inferior se observa que el resorte se estira $0,625 \text{ m}$ hasta alcanzar la posición de equilibrio. A partir del instante en que el sistema alcanza el equilibrio una fuerza externa $f(t) = 68e^{-2t} \cos(4t)$ es aplicada sobre el bloque.

- a) (2 ptos) Modele la ecuación diferencial e indique las condiciones iniciales.

Solución:

En el punto de equilibrio:

$$\begin{aligned}mg &= kS_0 \\(2)(10) &= k(0,625) \\k &= 32\end{aligned}$$

El modelo del resorte en movimiento será:

$$\begin{aligned}f(t) - kx &= mx'' \\mx'' + kx &= f(t) \\2x'' + 32x &= 68e^{-2t} \cos(4t)\end{aligned}$$

Si el movimiento inicia en el P.E., entonces el modelo con condiciones iniciales será:

$$\begin{cases} x'' + 16x = 34e^{-2t} \cos(4t) \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$$

- b) (1 pto) Si la solución al problema anterior se puede escribir como

$$x(t) = \frac{\sqrt{85}}{4} \sin(4t + \theta_1) - \frac{\sqrt{17}}{2} e^{-2t} \sin(4t + \theta_2)$$

¿Cuál es la amplitud de vibración después de mucho tiempo?

Solución:

Definimos la función para un tiempo muy grande ($t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{85}}{4} \sin(4t + \theta_1) - \frac{\sqrt{17}}{2} e^{-2t} \sin(4t + \theta_2) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{85}}{4} \sin(4t + \theta_1) \right) \\
&= \frac{\sqrt{85}}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(4t + \theta_1) \\
&= \frac{\sqrt{85}}{4} \sin(4t + \theta_1)
\end{aligned}$$

De dónde la amplitud resulta ser

$$A = \frac{\sqrt{85}}{4}$$

- c) (2 pts) Pasado un tiempo, se varía las condiciones del problema de tal manera que la ecuación de movimiento del bloque es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = -5 \sin(4t) + 2 \cos(4t)$$

Halle la solución general. Utilice el método que crea conveniente.

Solución:

La ecuación auxiliar está dada por:

$$\begin{aligned}
r^2 + 16 &= 0 \\
r^2 &= -16
\end{aligned}$$

Entonces las raíces serán:

$$\Rightarrow r_{1,2} = \pm 4i,$$

Por lo tanto, la solución homogénea es

$$x_h = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t). \quad (1)$$

A partir del término no homogéneo suponemos que la solución particular tiene la forma $x_p = A \cos(4t) + B \sin(4t)$; sin embargo, a partir de (1) vemos que esta solución propuesta satisface la ecuación homogénea. Por lo tanto, se propone la siguiente solución particular

$$\begin{aligned}
x_p &= [A \cos(4t) + B \sin(4t)] t \\
\Rightarrow x_p' &= -4At \sin(4t) + 4Bt \cos(4t) + A \cos(4t) + B \sin(4t) \\
x_p'' &= -4A \sin(4t) - 16At \cos(4t) + 4B \cos(4t) - 16Bt \sin(4t) - 4A \sin(4t) + 4B \cos(4t) \\
\Rightarrow x_p'' &= -8A \sin(4t) - 16At \cos(4t) + 8B \cos(4t) - 16Bt \sin(4t).
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$x_p'' + 16x_p = -5 \sin(4t) + 2 \cos(4t)$$

se obtiene

$$-8A \sin(4t) + 8B \cos(4t) = -5 \sin(4t) + 2 \cos(4t)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5}{8} \\
B &= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular de x resulta ser:

$$x_p = \left[\frac{5}{8} \cos(4t) + \frac{1}{4} \sin(4t) \right] t \quad (2)$$

Finalmente, la solución general de x viene dada por:

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t) + \frac{5t}{8} \cos(4t) + \frac{t}{4} \sin(4t) \quad (3)$$

- d) (1 pto) Considerando que $x(0) = 1$ y $x'(0) = -1$. Halle la solución de la ecuación del ítem anterior.

Solución:

Evalutando la ecuación (3) en $t = 0$

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{5(0)}{8} \cos(0) + \frac{0}{4} \sin(0) \\ &= c_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la condición $x(0) = 1$, se obtiene que

$$c_1 = 1$$

Ahora, derivando (3)

$$x'(t) = -4c_1 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t) + \frac{5}{8} \cos(4t) + \frac{1}{4} \sin(4t) - \frac{5t}{2} \sin(4t) + t \cos(4t)$$

Por lo tanto

$$x'(0) = 4c_2 + \frac{5}{8}.$$

Por lo tanto, de la condición $x'(0) = -1$, se obtiene que

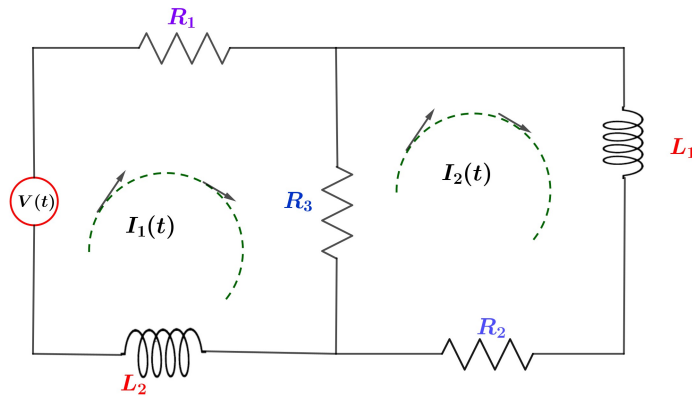
$$\begin{aligned} 4c_2 + \frac{5}{8} &= -1 \\ c_2 &= -\frac{13}{32} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general de x es:

$$x(t) = \cos(4t) - \frac{13}{32} \sin(4t) + \frac{5t}{8} \cos(4t) + \frac{t}{4} \sin(4t)$$

Problema 2 (6 Puntos)

a) (3 pts) Considere el circuito mostrado en la siguiente figura:



Modele las ecuaciones diferenciales en la malla derecha e izquierda que permitan encontrar las corrientes $I_1(t)$ y $I_2(t)$. Seguidamente, exprese el sistema de ecuaciones diferenciales en la forma $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix}$$

Solución:

Malla 1:

$$R_1 I_1 + R_3 [I_1 - I_2] + L_2 \frac{dI_1}{dt} = V(t) \quad (4)$$

Malla 2:

$$-R_3 [I_1 - I_2] + L_1 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 = 0 \quad (5)$$

De (4) y (5) tenemos:

$$\begin{cases} L_2 I_1' = -R_1 I_1 + R_3 [I_2 - I_1] + V(t) \\ L_1 I_2' = R_3 [I_1 - I_2] - R_2 I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1' = -\left[\frac{R_1 + R_3}{L_2}\right] I_1 + \frac{R_3}{L_2} I_2 + \frac{V(t)}{L_2} \\ I_2' = \frac{R_3}{L_1} I_1 - \left[\frac{R_2 + R_3}{L_1}\right] I_2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 + R_3}{L_2} & \frac{R_3}{L_2} \\ \frac{R_3}{L_1} & -\frac{R_2 + R_3}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{V(t)}{L_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) (3 pts) Utilizando transformada de Laplace, resolver la siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$x' = -x + 4y \quad (6)$$

$$y' = 3x - 2y \quad (7)$$

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 4$$

Solución:

Sea $\mathcal{L}\{x\} = X(s)$ y $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$. Entonces, aplicando la transformada de Laplace a (6):

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= -X(s) + 4Y(s) \\ sX(s) - 3 &= -X(s) + 4Y(s) \\ \Rightarrow (s+1)X(s) - 4Y(s) &= 3. \end{aligned} \quad (8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (7):

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0) &= 3X(s) - 2Y(s) \\ sY(s) - 4 &= 3X(s) - 2Y(s) \\ \Rightarrow -3X(s) + (s+2)Y(s) &= 4. \end{aligned} \quad (9)$$

De (8) y (9), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (s+1)X(s) - 4Y(s) &= 3 \\ -3X(s) + (s+2)Y(s) &= 4 \end{cases}$$

Este sistema tiene la siguiente solución:

$$X(s) = \frac{3s+22}{s^2+3s-10} \quad (10)$$

$$Y(s) = \frac{4s+13}{s^2+3s-10} \quad (11)$$

De (10):

$$X(s) = \frac{3s+22}{(s-2)(s+5)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+5}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(s+5) + B(s-2) &= 3s+22 \\ (A+B)s + (5A-2B) &= 3s+22 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

Por lo que

$$X(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{1}{s+5}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s-2} - \frac{1}{s+5} \right\} \\ \Rightarrow x(t) &= 4e^{2t} - e^{-5t} \end{aligned} \quad (12)$$

Similarmente, de (11):

$$Y = \frac{4s+13}{(s-2)(s+5)} = \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+5}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} C(s+5) + D(s-2) &= 4s+13 \\ (C+D)s + (5C-2D) &= 4s+13 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}C &= 3 \\D &= 1\end{aligned}$$

Así, $Y(s)$ se puede escribir como

$$Y(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+5}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+5} \right\} \\y(t) &= 3e^{2t} + e^{-5t}\end{aligned}\tag{13}$$

Por último, de (12) y (13), la solución es:

$$\begin{aligned}x(t) &= 4e^{2t} - e^{-5t} \\y(t) &= 3e^{2t} + e^{-5t}\end{aligned}$$

Problema 3 (8 Puntos)

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = 6 \sin(t) \cos(t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

- a) (2 pts) Halle $\mathcal{L}\{y'(t)\}$ en términos de la variable s . Sugerencia, $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$

Solución:

Según la sugerencia tenemos:

$$y'' + y = 3 \sin(2t) \quad (14)$$

Aplicamos la transformada de Laplace a (14):

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - y(0)s - y'(0) + Y(s) &= 3 \left[\frac{2}{s^2 + 4} \right] \\ s^2 Y(s) - 2s + Y(s) &= \frac{6}{s^2 + 4} \\ (s^2 + 1) Y(s) &= \frac{6}{s^2 + 4} + 2s \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{6}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} + \frac{2s}{s^2 + 1} \end{aligned} \quad (15)$$

Sabemos:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) \quad (16)$$

Entonces, reemplazamos (15) en (16):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= s \left[\frac{6}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} + \frac{2s}{s^2 + 1} \right] - 2 \\ &= \frac{6s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} + \frac{2s^2}{s^2 + 1} - 2 \end{aligned}$$

- b) (3 pts) Obtener la solución de la ecuación diferencial.

Solución:

Como $Y(s)$ está dado por la expresión (15), para hallar $y(t)$ debemos aplicar la transformada inversa de Laplace, para ello necesitamos descomponer en fracciones la siguiente expresión

$$\frac{6}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Ms + N}{s^2 + 1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (As + B)(s^2 + 1) + (Ms + N)(s^2 + 4) &= 6 \\ (A + M)s^3 + (B + N)s^2 + (A + 4M)s + (B + 4N) &= 6 \end{aligned}$$

de donde se plantea el sistema

$$\begin{cases} A + M &= 0 \\ B + N &= 0 \\ A + 4M &= 0 \\ B + 4N &= 6 \end{cases}$$

cuya solución es

$$A = 0, \quad B = -2, \quad M = 0, \quad N = 2$$

Por lo tanto, de (15) tenemos que

$$Y(s) = \frac{-2}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 1}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace,

$$y(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\} + 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} + 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\}$$

Finalmente, la solución es:

$$y(t) = -\sin(2t) + 2\sin(t) + 2\cos(t) \quad (17)$$

c) (3 pts) Halle la transformada de Laplace de la función $f(t)$, definida como:

$$f(t) = \begin{cases} y(t), & 0 \leq t < 2\pi \\ \cos(t), & 2\pi \leq t \end{cases}$$

donde $y(t)$ es la solución del ítem anterior.

Solución:

Definiendo $f(t)$ mediante función escalón tenemos:

$$f(t) = y(t) + [\cos(t) - y(t)] \mathcal{U}(t - 2\pi)$$

Aplicando la transformada de Laplace a $f(t)$ y utilizando (17):

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L} \{y(t) + [\cos(t) - y(t)] \mathcal{U}(t - 2\pi)\} \\ &= Y(s) + \mathcal{L} \{[\cos(t) + \sin(2t) - 2\sin(t) - 2\cos(t)] \mathcal{U}(t - 2\pi)\} \\ &= Y(s) + \mathcal{L} \{[\sin(2t) - 2\sin(t) - \cos(t)] \mathcal{U}(t - 2\pi)\} \\ &= Y(s) + e^{-2\pi s} \mathcal{L} \{\sin(2(t + 2\pi)) - 2\sin(t + 2\pi) - \cos(t + 2\pi)\} \\ &= Y(s) + e^{-2\pi s} \mathcal{L} \{\sin(2t) - 2\sin(t) - \cos(t)\} \\ &= -\frac{2}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 1} + e^{-2\pi s} \left[\frac{2}{s^2 + 4} - 2\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

1. (1.5 pts) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x_1'' + 10x_1 - 4x_2 = 0 \quad (18)$$

$$x_2'' - 4x_1 + 4x_2 = 0 \quad (19)$$

Con las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = -1$. Aplique la Transformada de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, multiplique convenientemente y despeje $\mathcal{L}\{x_1\}$ (exprese $\mathcal{L}\{x_1\}$ en términos de s). NO ES NECESARIO RESOLVER EL SISTEMA.

Solución:

Sea $\mathcal{L}\{x_1\} = X_1(s)$ y $\mathcal{L}\{x_2\} = X_2(s)$. Entonces, aplicando la transformada de Laplace a (18), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_1'' + 10x_1 - 4x_2\} &= 0 \\ s^2 X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\ s^2 X_1(s) - 1 + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\ (s^2 + 10)X_1(s) - 4X_2(s) &= 1 \end{aligned}$$

Despejando X_2

$$X_2(s) = \frac{(s^2 + 10)X_1(s) - 1}{4} \quad (20)$$

Análogamente, aplicando la transformada de Laplace a (19), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_2'' - 4x_1 + 4x_2\} &= 0 \\ s^2 X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) - 4X_1(s) + 4X_2(s) &= 0 \\ s^2 X_2(s) + 1 - 4X_1(s) + 4X_2(s) &= 0 \\ -4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) &= -1 \end{aligned} \quad (21)$$

Reemplazamos (20) en (21):

$$\begin{aligned} -4X_1 + (s^2 + 4) \left[\frac{(s^2 + 10)X_1 - 1}{4} \right] &= -1 \\ -4X_1 + \left[\frac{(s^2 + 4)(s^2 + 10)}{4} \right] X_1 &= -1 + \frac{s^2 + 4}{4} \\ \left[\frac{(s^2 + 4)(s^2 + 10)}{4} - 4 \right] X_1 &= \frac{s^2}{4} \end{aligned}$$

Entonces:

$$X_1(s) = \frac{s^2}{s^4 + 14s^2 + 24} \quad (22)$$

2. (1.5 pts) Determine la expresión que defina la función de la figura usando el escalón unitario y halle la transformada de Laplace a dicha función.

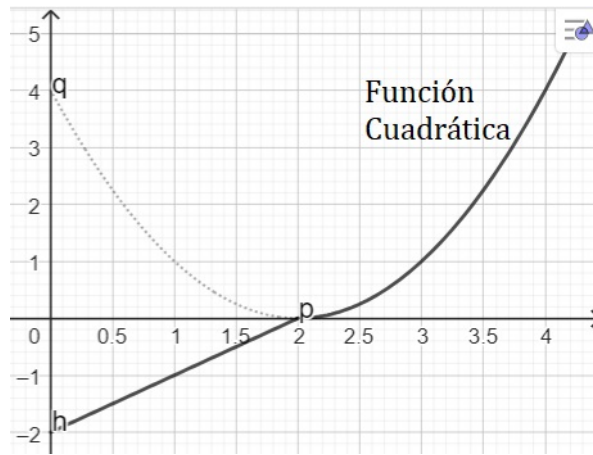
Solución:

De la figura observamos que la regla de correspondencia de $f(t)$ está dado por:

$$f(t) = \begin{cases} t - 2, & 0 \leq t < 2 \\ (t - 2)^2, & 2 \leq t \end{cases}$$

Por lo tanto, en términos de la función escalón unitario

$$f(t) = t - 2 + [(t - 2)^2 - (t - 2)] \mathcal{U}(t - 2) \quad (23)$$



Aplicamos la Transformada de Laplace a (23):

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \mathcal{L}\{t-2\} + \mathcal{L}\left\{[(t-2)^2 - (t-2)]\mathcal{U}(t-2)\right\} \\
 &= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2 - t\} \\
 &= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right]
 \end{aligned}$$