



UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Práctica Calificada 2

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:

Nombres:

Sección:

Parte 1 (12.0 puntos)

1. Límites y continuidad

1.1. Determina los siguientes límites:

Sugerencia: Puedes usar factorización, l'Hôpital, etc.

1.1.1. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{-x^2 - 2x + 8}$

Factorizando,

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+6)}{-(x-2)(x+4)}$$

$$L = -\frac{(2)+6}{(2)+4} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

1.1.2. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2(x)}{1/x^2}$

Al evaluar directamente,

$$L = \frac{\ln(0^+)}{1/0^+} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Al evaluar directamente,

$$L = \frac{\ln(0^+)}{1/0^+} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Aplicando regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x \cdot \ln 2}\right)}{\left(-2 \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \ln 2} (x^2) = \underline{0} \quad \checkmark$$

1.2. [2.0 puntos] Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 4 & -1 < x \leq 3 \\ 3x - 14 & 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

Emplea los criterios de continuidad y analiza en detalle si $f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x^2 + 3x + 4) = 4 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\checkmark f(0) = 4$$

$$\text{Vemos que } \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 4$$

$\therefore f$ es continua en $x = 0$. $\checkmark$

Alternativamente, al tratarse de una polinómica, continua en $x \in \mathbb{R}$, también lo será en $x \in (-1, 3]$. $\checkmark$

2. Derivada

2.1. [2.0 puntos] Sea la función

$$h(x) = 3^{x^2} \sin(2x)$$

calcula $h'(0)$.

$$1, \quad x^2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad x^2, \quad 0$$

calcula $h'(0)$.

$$h'(x) = 3^{x^2} \ln 3 \cdot 2x \sin 2x + 2 \cdot 3^{x^2} \cos 2x$$

$$h'(0) = \cancel{(1) \ln 3 \cdot 2(1) \cdot (0)} + 2 \cdot (1) \cdot (1) \\ = 2$$

2.2. [2.0 puntos] Deriva mediante reglas de derivación la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3^x + 1}{\ln(3x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{3^x \ln 3 \cdot \ln(3x+1) - (3^x + 1) \frac{3}{3x+1}}{(\ln(3x+1))^2} \\ = \frac{3^x \ln 3 (3x+1) \ln(3x+1) - 3^{x+1} - 3}{(3x+1) (\ln(3x+1))^2}$$

2.3. En la Figura 1 mostramos los gráficos de $f'(x)$ y de $f''(x)$. Considera $\text{Dom } f = [0, 7]$.

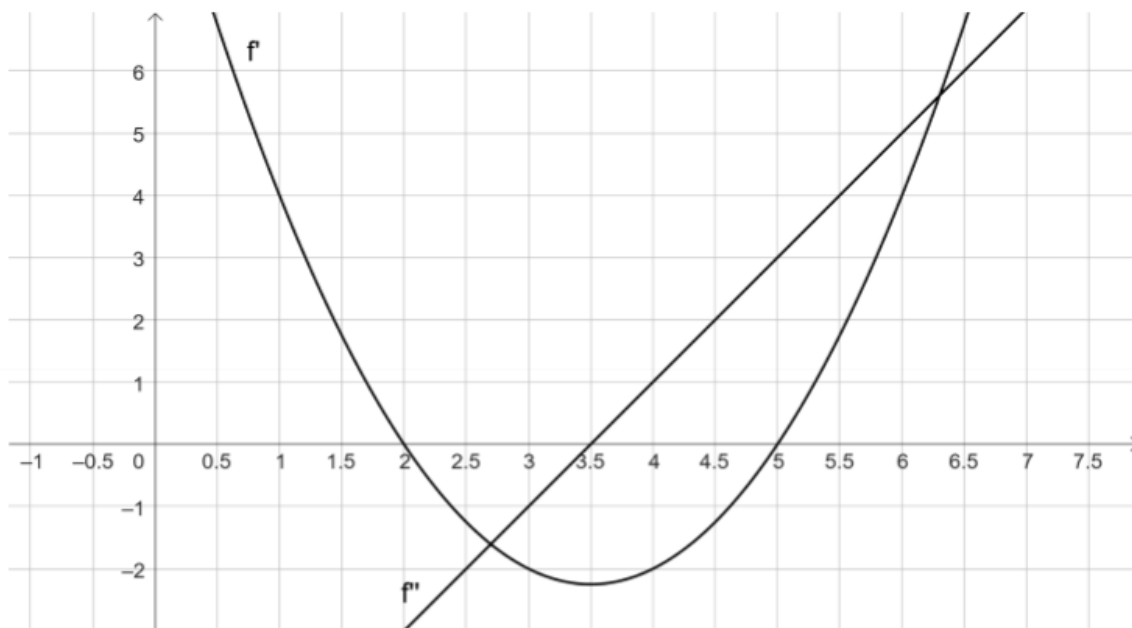


Figura 1: Gráficos de $f'(x)$ y $f''(x)$.

A partir de los gráficos en la Figura 1:

2.3.1. [1.0 puntos] Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es creciente. Explica brevemente tu respuesta.

La función f será creciente cuando $f'(x) > 0$.
 ↳ Del gráfico, f es creciente en $x \in (0, 2) \cup (5, 7)$,
 tomando en cuenta el dominio.

2.3.2. [1.0 puntos] Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo. Explica brevemente tu respuesta.

- 2.3.2. [1.0 puntos] Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo. Explica brevemente tu respuesta.

La función cóncava hacia abajo cuando $f'' < 0$.

→ Del gráfico, f es cóncava hacia abajo en
 $x \in (0, 3.5)$, teniendo en cuenta el dominio.

Parte 2 (8.0 puntos)

3. El *tiempo de aprendizaje* T , medido en minutos, de un modelo de *Deep Learning* para Inteligencia Artificial depende de la cantidad de parámetros p , medida en miles, que contenga. Un grupo de estudiantes de UTEC estudia el tiempo de aprendizaje de cierto modelo, representado por la siguiente función:

$$T(p) = 0.0001p^2 + \frac{1100}{p} + 60\log_3(p), \quad p \in (0, 100]$$

- 3.1. [1.5 puntos] En su análisis del modelo, el grupo encontró un punto crítico para $p = 20.1114$ miles de parámetros. Indica si esto corresponde a un máximo o mínimo local del tiempo

- 3.1. [1.5 puntos] En su análisis del modelo, el grupo encontró un punto crítico para $p = 20.1114$ miles de parámetros. Indica si esto corresponde a un máximo o mínimo local del tiempo de aprendizaje. **Justifica tu respuesta.**

Nota: Los valores muy pequeños pueden ser aproximados a cero.

$$T'(p) = 0,0002p - \frac{1100}{p^2} + \frac{60}{p \ln 3}$$

$$T''(p) = 0,0002 + \frac{2200}{p^3} - \frac{60}{p^2 \ln 3}$$

Evaluamos en la segunda derivada:

$$T''(20,1114) \approx 0,14 > 0 \Rightarrow \text{Se trata de un } \underline{\text{mínimo local.}}$$

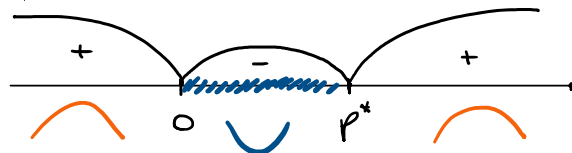
- 3.2. [1.5 puntos] El grupo, a su vez, encontró una inflexión en la curva del tiempo de aprendizaje para $p = 40.5262$ miles de parámetros. Indica el cambio de concavidad de la curva de $T(p)$ en el punto de inflexión, es decir, si pasa de ser cóncava hacia arriba a serlo hacia abajo o viceversa. **Justifica tu respuesta.**

Sea el punto indicado p^* . Despreciando el primer término en T'' ,

$$T''(p) \approx \frac{2200}{p^3} - \frac{60}{p^2 \ln 3}$$

Para tener concavidad hacia arriba: $T'' > 0$:

$$\frac{2200}{p^3 \ln 3} (110 \ln 3 - 3p) > 0 \Rightarrow p(3p - 110 \ln 3) < 0$$



En p^* se pasa de concavidad hacia arriba a hacia abajo.

- 3.3. [1.0 puntos] El grupo evalúa si es posible implementar el modelo. La condición es que el tiempo de aprendizaje óptimo sea menor a 3 horas. Indica si será posible implementar el modelo a partir de los resultados obtenidos. **Justifica tu respuesta**

tiempo de aprendizaje óptimo sea menor a 3 horas. Indica si será posible implementar el modelo a partir de los resultados obtenidos. Justifica tu respuesta

Evaluamos en el punto crítico:

$$T(p=20,1114) \approx 218,649 > 180 \text{ min}$$

∴ No es viable el modelo.

4. Un equipo de investigadores de mecatrónica y bioingeniería de UTEC unen fuerzas para diseñar una válvula coronaria sintética que deba permitir un flujo sanguíneo adecuado con mínima pérdida de presión. Según la ley de Poiseuille, el flujo volumétrico Q o tasa de cambio instantánea del volumen V , a través de un conducto cilíndrico está dado por la siguiente regla de correspondencia:

$$Q(r) = \frac{\pi \Delta P r^4}{8 \mu L}$$

donde ΔP (constante) es la diferencia de presiones en los extremos del conducto, r es el radio del conducto, μ (constante) es la viscosidad de la sangre y L la longitud del conducto.

Además, la válvula tiene una forma tal que su radio depende de su longitud a través de la siguiente función:

$$r(L) = a \cdot 2^{-3bL}, \quad L > 0$$

donde a y b son parámetros positivos del diseño del material a utilizar.

- 4.1. [1.0 puntos] Demuestra que Q en función de L es:

$$Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8 \mu} \cdot 3^{-12bL} L^3$$

Debe ser 2

Reemplazando,

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8 \mu L} (a \cdot 2^{-3bL})^4$$

$$Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8 \mu} \cdot 2^{-12bL} L^3$$

- 4.2. [1.5 puntos] Calcula la tasa de cambio instantánea del flujo volumétrico con respecto a la longitud del conducto. **Sugerencia:** Ten cuidado con las variables y constantes.

Calculamos

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dL} &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \left(2^{-12bL} \cdot \ln 2 \cdot (-12b) L^3 + 2^{-12bL} \cdot 3L^2 \right) \\ &= \frac{3\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot 2^{-12bL} L^2 \left(-4b \ln 2 \cdot L + 1 \right)\end{aligned}$$

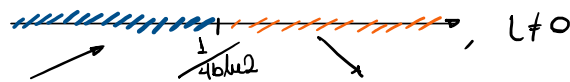
- 4.3. [1.5 puntos] Determina el valor de L que maximiza el flujo volumétrico mediante los criterios de primera y segunda derivada.

Buscamos puntos críticos:

$$Q'(L) = 0 \Rightarrow L = 0 \vee L = \frac{1}{4b \ln 2}$$

Según el cambio de signo,

$$Q'(L) > 0 \Rightarrow \frac{3\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot 2^{-12bL} L^2 \left(-4b \ln 2 \cdot L + 1 \right) > 0$$



$Q(L)$ es máximo
en $L = \frac{1}{4b \ln 2}$

Parte 3 - Bonus (3.0 puntos)

5. [1.0 puntos] Calcula

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{3+5e^{-3x}} + 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{3+5e^{-3x}} + 1 \right) &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

6. [1.0 puntos] Sea

$$f(x) = [\ln(x)]^{-\sin(x)}$$

Calcula $f'(x)$. **Sugerencia:** Usa derivación logarítmica.

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= -\sin x \cdot \ln(\ln x) \\ \text{Derivando,} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\cos x \cdot \ln(\ln x) - \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \\ \text{Multiplicando por } f(x), \\ f'(x) &= -\cos x \cdot f(x) \cdot \ln(\ln x) - \sin x \cdot \frac{f(x)}{x \ln x} \end{aligned}$$

1. Completa para...

$$f'(x) = -(\ln x)^{-\sec x} \left(\cos x \cdot \ln(\ln x) + \frac{\sec x}{x \ln x} \right)$$

7. [1.0 puntos] Calcula la derivada por definición

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

no mediante reglas de derivación, de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{5x-2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(x+h)-2} - \sqrt{5x-2}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{5(x+h)-2} + \sqrt{5x-2}}{\sqrt{5(x+h)-2} + \sqrt{5x-2}} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{5x} + 5h - 2) - (\cancel{5x} - 2)}{h(\sqrt{5(x+h)-2} + \sqrt{5x-2})}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$$

