

Práctica Calificada 2

Nombres y Apellidos:

Sección:

Parte I

1. Límites y Continuidad.

Considere las funciones:

$$f(x) = \frac{x - 9x^3}{1 - 3x}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{3kx}, & 0 \leq x < 3 \\ 3x + 1, & 3 \leq x \leq 9 \end{cases}, \quad h(x) = \frac{5x}{8x - 5 \ln(x) + \frac{1}{x^2}} \quad (1)$$

y responda las siguientes preguntas.

- 1.1. **(2.0pts)** Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x)$. **Sugerencia:** Puede usar factorización, l'Hôpital, etc.

Solución: Hay indeterminación $\frac{0}{0}$

Usaremos L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x - 9x^3}{1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{1 - 27x^2}{-3} = \frac{1 - 27(\frac{1}{3})^2}{-3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

- 1.2. **(2.0pts)** Determine el valor de k de tal forma que $g(x)$ sea continua en su dominio.

Solución: Como g es continua, existe $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 &= 10 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} e^{3kx} &= e^{9k} \end{aligned} \right\} e^{9k} = 10$$

$$\boxed{k = \frac{\ln(10)}{9} = 0.256}$$

1.3. (2.0pts) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. **Sugerencia:** Puede usar factorización, l'Hôpital, etc.

Solución: Hay indeterminación:

Usaremos L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{8x - 5\ln x + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{8 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3}}$$

$$\text{haciendo } x \rightarrow +\infty : \frac{5}{8 - 0 - 0} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

2. Derivación.

2.1. (2.0pts) Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones derivables, tal que se define

$$Z(x) = 2 \ln[p(x)q(x)] \quad (2)$$

Determine el valor de $Z'(a)$, si se cumplen las siguientes condiciones

$$p(a) = a, \quad p'(a) = 1, \quad q(a) = \frac{1}{a^2} \quad y \quad q'(a) = -\frac{2}{a^3}$$

Solución: Usando regla de cadena:

$$Z'(a) = \frac{2}{p(a) \cdot q(a)} \cdot (p'(a)q(a) + p(a) \cdot q'(a))$$

Reemplazando:

$$Z'(a) = \frac{2}{a \cdot \frac{1}{a^2}} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{a^2} + a \cdot \left(-\frac{2}{a^3}\right) \right)$$

$$Z'(a) = \frac{2}{\frac{1}{a}} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2} \right)$$

$$Z'(a) = 2a \left(-\frac{1}{a^2} \right)$$

$$\boxed{Z'(a) = -\frac{2}{a}}$$

2.2. (2.0pts) Considere la función

$$U(x) = \frac{\sqrt{e^{-3x}}}{\ln(x)} \quad (3)$$

y determine su derivada haciendo uso de las reglas de derivación.

Solución: Escribamos la función: $U(x) = \frac{e^{-\frac{3x}{2}}}{\ln x}$

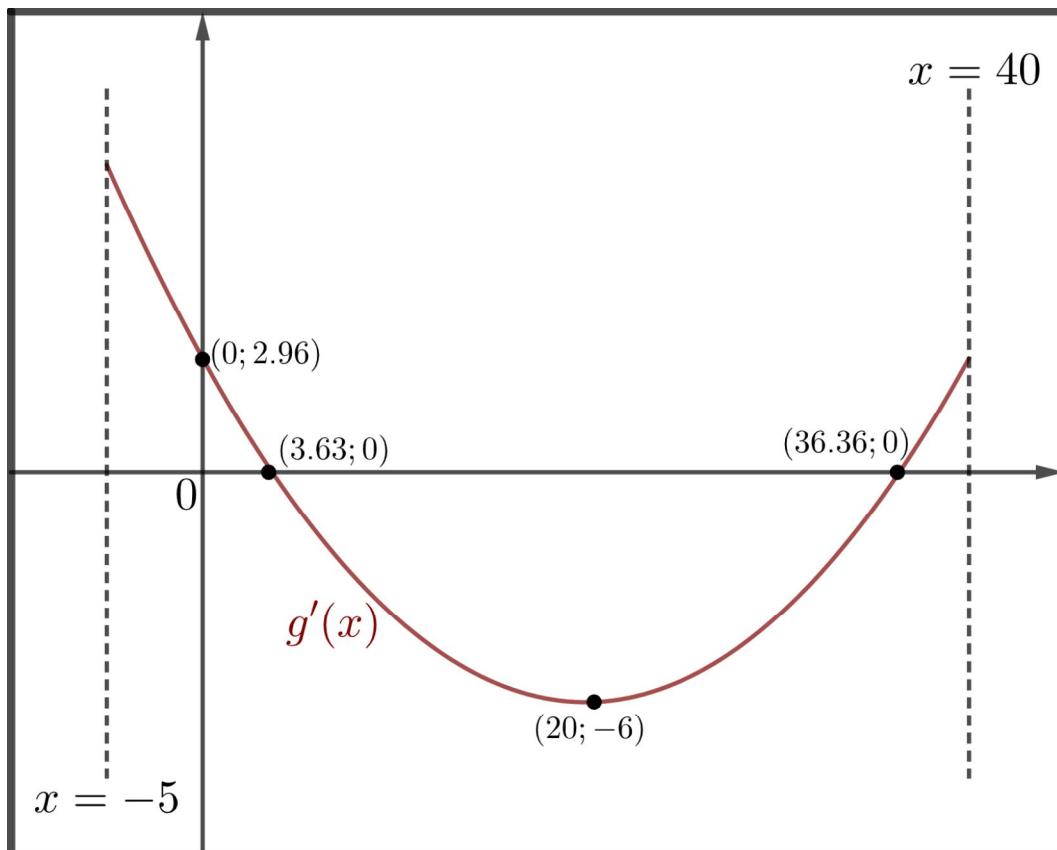
Regla de cociente.

$$U'(x) = \frac{(e^{-\frac{3x}{2}})' \cdot \ln x - e^{-\frac{3x}{2}} \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$U'(x) = \frac{-\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}} \cdot \ln x - e^{-\frac{3x}{2}} \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$U'(x) = \frac{e^{-\frac{3x}{2}} \left(-\frac{3}{2} \ln x - \frac{1}{x} \right)}{(\ln x)^2}$$

2.3. El siguiente gráfico corresponde a la derivada de la función $g(x)$



2.3.a. (1.0pts) Indique, argumentando su respuesta, el intervalo en donde $g(x)$ es decreciente.

Solución: g es decreciente donde $g' < 0$; del gráfico

$$g' < 0 \quad \text{para } x \in \langle 3.63 ; 36.36 \rangle$$

2.3.b. (1.0pts) Determine si existe algún valor de x en el que la función g posee un punto de inflexión. De existir, indique el valor y justifique la respuesta.

Solución: Para obtener punto de inflexión necesitamos los valores donde $g'' = 0$, es decir los valores del dominio donde g' toma un extremo relativo.

De la gráfica, esto ocurre en: $x = 20$

Parte II

3. En el desarrollo de una aplicación de Realidad Aumentada (RA) para entrenamiento médico, se utiliza un algoritmo de procesamiento de imágenes para identificar y clasificar instrumentos quirúrgicos en tiempo real. El rendimiento de este algoritmo es crítico, ya que afecta directamente la fluidez de la experiencia de RA. Para un algoritmo de prueba, el tiempo de procesamiento T (en milisegundos) depende del número de objetos n (en cientos de objetos) a analizar en una escena, según la expresión:

$$T(n) = \frac{1}{4}n^2(n^2 - 4n + 8)e^{-n} \quad (4)$$

- 3.1. (2.0pts) En una escena arbitraria se tienen 400 objetos. Determine si esta cantidad corresponde a un máximo, un mínimo o si no proporciona información sobre el tiempo T de procesamiento.

Solución: $T(n) = \frac{1}{4}(n^4 - 4n^3 + 8n^2)e^{-n}$

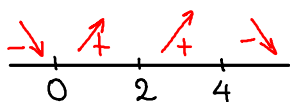
1era derivada: $T'(n) = \frac{1}{4}(4n^3 - 12n^2 + 16n)e^{-n} - \frac{1}{4}(n^4 - 4n^3 + 8n^2)e^{-n}$

$$T'(n) = \frac{1}{4}e^{-n}(4n^3 - 12n^2 + 16n - n^4 + 4n^3 - 8n^2)$$

$$T'(n) = \frac{1}{4}e^{-n}(-n^4 + 8n^3 - 20n^2 + 16n)$$

Igualemos a cero: $-n^4 + 8n^3 - 20n^2 + 16n = 0$

Resolviendo se obtiene: $n = 0$; $n = 2$; $n = 4$



Se da máximo en $n = 4 \rightarrow 400$ objetos

- 3.2. (2.0pts) El rendimiento del algoritmo se verá afectado cuando la concavidad de T cambie de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Determine si habrá un cambio en el rendimiento de algoritmo si 200 objetos representa un punto de inflexión.

Solución: $T'(n) = \frac{1}{4}e^{-n}(-n^4 + 8n^3 - 20n^2 + 16n)$

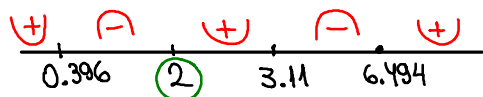
2da derivada. $T''(n) = -\frac{1}{4}e^{-n}(-n^4 + 8n^3 - 20n^2 + 16n) + \frac{1}{4}e^{-n}(-4n^3 + 24n^2 - 40n + 16)$

$$T''(n) = \frac{1}{4}e^{-n}(n^4 - 8n^3 + 20n^2 - 16n - 4n^3 + 24n^2 - 40n + 16)$$

$$T''(n) = \frac{1}{4}e^{-n}(n^4 - 12n^3 + 44n^2 - 56n + 16)$$

Igualemos a cero: $n^4 - 12n^3 + 44n^2 - 56n + 16 = 0$

Resolviendo se obtiene: $n = 0.396$; $n = 2$; $n = 3.11$; $n = 6.494$



Cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba
→ Si se verá afectado el rendimiento

4. Un grupo de ingenieros está desarrollando un satélite de comunicaciones de nueva generación, el cual requiere un nuevo tipo de antena desplegable para maximizar la cobertura de señal en órbita. Una vez que el satélite se encuentre en el espacio, la antena se despliega automáticamente adoptando una forma cónica. Se sabe que el volumen del cono (V), su altura (h) y el radio de su base (r) se expresan respectivamente como:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad h = \sqrt{k^2 - r^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{k\theta}{2\pi} \quad (5)$$

donde k es una constante positiva y θ es el ángulo de despliegue, el cual varía en el intervalo $(0, 2\pi)$.

- 4.1. (1.0pts) Demuestre que el volumen del cono depende del ángulo de despliegue según

$$V(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (6)$$

Solución: En V reemplazamos h y r

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{k\theta}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{3}\pi \frac{k^2\theta^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{k^2 - \frac{k^2\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{12} \frac{k^2\theta^2}{\pi} \sqrt{\frac{4\pi^2 k^2 - k^2\theta^2}{4\pi^2}}$$

$$= \frac{1}{12} \frac{k^2\theta^2}{\pi} \cdot \frac{k}{2\pi} \cdot \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} = \frac{k^3\theta^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

- 4.2. (1.5pts) Haga uso de la ecuación (6) y demuestre que la tasa de variación instantánea del volumen respecto a θ se expresa como:

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] \quad (7)$$

Solución: Derivamos: Regla producto:

$$V = \frac{k^3\theta^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \rightarrow V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[2\theta \cdot \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} + \theta^2 \cdot \frac{1}{2} (4\pi^2 - \theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2\theta) \right]$$

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[2\theta \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{2\theta(4\pi^2 - \theta^2) - \theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

- 4.3. (1.5pts) A partir de la ecuación (7) determine, justificando adecuadamente, el ángulo óptimo de despliegue que maximice el volumen de la antena, garantizando así la mayor área de cobertura para las comunicaciones.

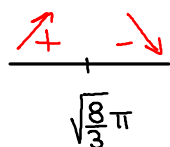
Solución:

$$V'(\theta) = 0 \quad \text{ó} \quad V'(\theta) \text{ no existe}$$

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] = 0 \rightarrow \begin{aligned} 8\pi^2\theta - 3\theta^3 &= 0 & ; & & 4\pi^2 - \theta^2 &= 0 \\ \theta(8\pi^2 - 3\theta^2) &= 0 & & & \theta &= 2\pi ; \theta = -2\pi \end{aligned}$$

$$\theta = 0 ; \theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi ; \theta = -\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$$

Como $\theta \in \langle 0; 2\pi \rangle$ solo consideramos $\theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$



El máximo volumen se da para $\theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$

Bonus

5. (1.0pts) Sea la función

$$y(x) = x^{\tan(x)}$$

Calcule $y'(x)$ haciendo uso de derivación logarítmica.

Solución: Aplicamos logaritmos :

$$\ln y = \ln x^{\tan x}$$

$$\ln y = \tan x \cdot \ln x$$

Derivamos : $\frac{1}{y} \cdot y' = (\tan x)' \ln x + \tan x \cdot (\ln x)'$

$$\frac{y'}{y} = \sec^2 x \cdot \ln x + \frac{\tan x}{x}$$

$$y' = \left(\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right) x^{\tan x}$$

6. (1.0pts) Sea la función definida como

$$F(x) = \frac{1}{x} + x \quad (8)$$

Determine $F'(x)$ por medio de la definición de derivada: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

Solución:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} + x+h - \left(\frac{1}{x} + x \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} + x+h - \frac{1}{x} - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} + h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x} + h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + h(x+h)x}{(x+h)x h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(-1 + (x+h)x)}{\cancel{h}(x+h)x} = \frac{-1 + x^2}{x^2} = \frac{-1}{x^2} + 1 \end{aligned}$$

7. (1.0pts) Sea la función definida como

$$f(x) = nx^2 + 8nx + C$$

donde C es una constante y $n \neq 0$. Determine el punto x en el cual la recta tangente a f es paralela a la recta $y(x) = 5x + 8$. Exprese su respuesta en función de n .

Solución: Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales

Pendiente de recta tangente . $f'(x) = 2nx + 8n$

Pendiente de recta $y(x)$ es 5

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad 2nx + 8n &= 5 \\ 2nx &= 5 - 8n \end{aligned}$$

$$x = \frac{5-8n}{2n}$$

Anexo 1: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Anexo 2: Reglas básicas

- $\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$

Práctica Calificada 2

Cálculo de una Variable

2025 - 1

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 2:

■ La evaluación es **INDIVIDUAL**. Actos de deshonestidad:

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ Sobre la evaluación

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros**. Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!