

Práctica Calificada 2

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:
Sección:

Nombres:

Parte 1 (12.0 puntos)

1. Límites y continuidad

1.1. Determina los siguientes límites:

Sugerencia: Puedes usar factorización, l'Hôpital, etc.

1.1.1. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 11x - 30}{x^2 - 8x + 15}$

Evaluando directamente:

$$\frac{-(5)^2 + 11(5) - 30}{(5)^2 - 8(5) + 15} = \frac{0}{0}$$

Indeterminación, factorizamos numerador y denominador.

$$-x^2 + 11x - 30 = -(x^2 - 11x + 30) = -(x - 5)(x - 6)$$

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

Simplificando,

$$\frac{-(x - 5)(x - 6)}{(x - 3)(x - 5)} = \frac{-(x - 6)}{x - 3}, \quad x \neq 5$$

Evaluando el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x - 6)}{x - 3} = \frac{-(5 - 6)}{5 - 3} = \frac{1}{2}$$

1.1.2. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_3(x)}{1/x}$

Al evaluar directamente:

$$\log_3(x) \rightarrow -\infty, \quad \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

Forma indeterminada $\frac{-\infty}{+\infty}$.

Aplicamos regla de L'Hôpital derivando numerador y denominador:

$$\frac{d}{dx} \log_3(x) = \frac{1}{x \ln 3}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x \ln 3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\ln 3} = 0$$

1.2. [2.0 puntos] Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 4 & -1 < x \leq 3 \\ 3x - 14 & 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

Emplea los criterios de continuidad y analiza en detalle si $f(x)$ es continua en $x = 7$.

① $f(7) = 3(7) - 14 = 7$ ✓

② $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} (3x - 14) = 7$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} \text{[no definida]} = \text{[no definida]}$ ✗

• LA FUNCIÓN $f(x)$ NO ES CONTINUA EN $x = 7$

2. Derivada

2.1. [2.0 puntos] Sea la función

$$h(x) = \frac{3^x \sin(2x - 3)}{x}$$

calcula $h'(3/2)$.

Para derivar $h(x)$, se aplica la regla del cociente:

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

donde $f(x) = 3^x \sin(2x - 3)$ y $g(x) = x$.

La derivada de $f(x)$ requiere la regla del producto:

$$f'(x) = (3^x)' \sin(2x - 3) + 3^x (\sin(2x - 3))'.$$

Recordando que $(3^x)' = 3^x \ln(3)$ y $(\sin(2x - 3))' = 2 \cos(2x - 3)$, se tiene

$$f'(x) = 3^x \ln(3) \sin(2x - 3) + 2 \cdot 3^x \cos(2x - 3).$$

$$h'(x) = \frac{[3^x \ln(3) \sin(2x - 3) + 2 \cdot 3^x \cos(2x - 3)]x - 3^x \sin(2x - 3)}{x^2}.$$

Evalutando en $x = \frac{3}{2}$, se calcula

$$2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1,$$

y la expresión se simplifica a

$$h'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{\frac{9}{4}} = 3^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{4}{9}.$$

Finalmente, como $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{243} \approx 15.588$, el valor numérico es aproximadamente

$$h'\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{4 \times 15.588}{9} = 6.93.$$

2.2. [2.0 puntos] Deriva mediante reglas de derivación la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^{3x-1} + 6}{\log_4(x)}$$

Sea

$$f(x) = \frac{e^{3x-1} + 6}{\log_4(x)}.$$

Usando la regla del cociente y recordando que

$$\log_4(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(4)},$$

obtenemos

$$f'(x) = \frac{3e^{3x-1} \log_4(x) - (e^{3x-1} + 6) \frac{1}{x \ln(4)}}{(\log_4(x))^2}.$$

2.3. En la Figura 1 mostramos los gráficos de $f'(x)$ y de $f''(x)$. Considera $\text{Dom } f = [0, 7]$.

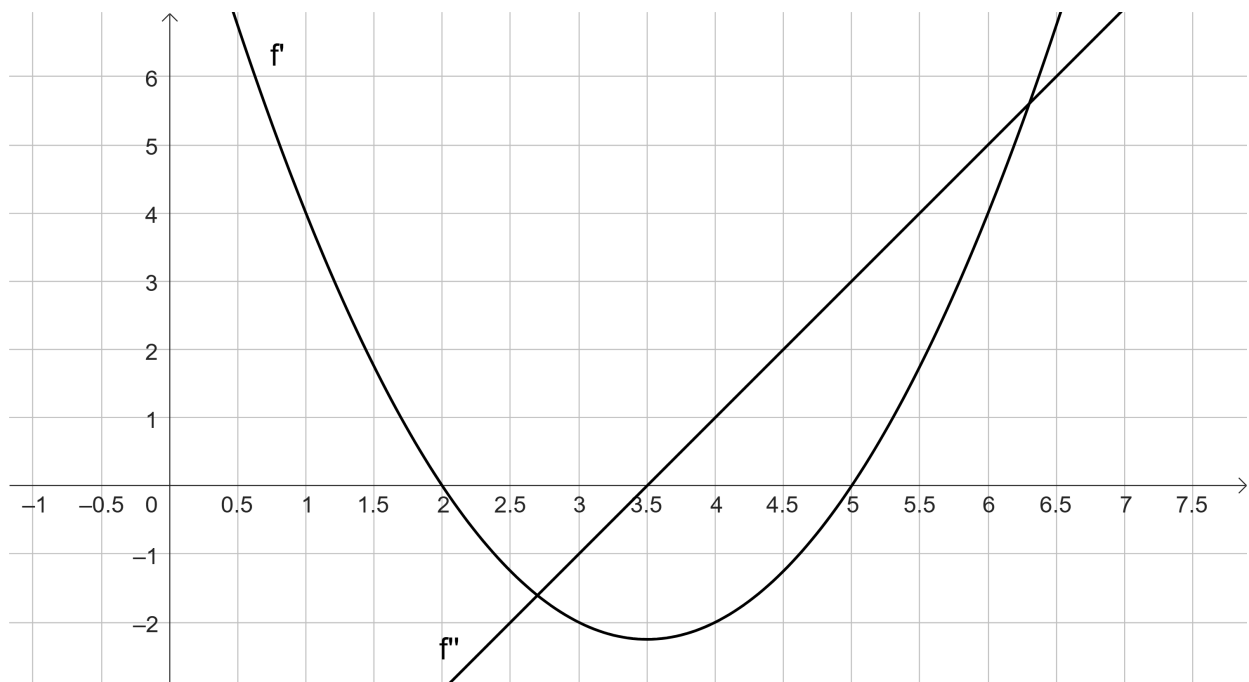


Figura 1: Gráficos de $f'(x)$ y $f''(x)$.

A partir de los gráficos en la Figura 1:

- 2.3.1. [1.0 puntos] Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es decreciente. Explica brevemente tu respuesta.

Para $f(x)$ sea decreciente se debe cumplir que $f'(x) < 0$

En la grafica $f'(x) < 0$ en $<2; 5>$

Por lo tanto $f(x)$ es decreciente en el intervalo $<2; 5>$

- 2.3.2. [1.0 puntos] Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba. Explica brevemente tu respuesta.

Para que sea cóncava hacia arriba se debe cumplir $f''(x) > 0$

En la grafica $f''(x) > 0$ en $<3.5; 7>$

Por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $<3.5; 7>$

Parte 2

(8.0 puntos)

3. El *tiempo de aprendizaje* T , medido en minutos, de un modelo de *Deep Learning* para Inteligencia Artificial depende de la cantidad de parámetros p , medida en miles, que contenga. Un grupo de estudiantes de UTEC estudia el tiempo de aprendizaje de cierto modelo, representado por la siguiente función:

$$T(p) = 0.0004p^2 + \frac{800}{p} + 60\log_5(p), \quad p \in (0, 100]$$

- 3.1. [1.5 puntos] En su análisis del modelo, el grupo encontró un punto crítico para $p = 21.2532$ miles de parámetros. Indica si esto corresponde a un máximo o mínimo local del tiempo de aprendizaje. **Justifica tu respuesta.**

Nota: Los valores muy pequeños pueden ser aproximados a cero.

La primera derivada es

$$T'(p) = 0.0008p - \frac{800}{p^2} + \frac{60}{p \ln(5)}.$$

La segunda derivada es

$$T''(p) = 0.0008 + \frac{1600}{p^3} - \frac{60}{p^2 \ln(5)}.$$

— Evaluando en $p = 21.2532$, se obtiene

$$T''(21.2532) \approx 0.0008 + 0.1669 - 0.0825 = 0.0852 > 0.$$

Dado que $T''(21.2532) > 0$, el punto crítico corresponde a un **mínimo local** del tiempo de aprendizaje.

- 3.2. [1.5 puntos] El grupo, a su vez, encontró una inflexión en la curva del tiempo de aprendizaje para $p = 44.855$ miles de parámetros. Indica el cambio de concavidad de la curva de $T(p)$ en el punto de inflexión, es decir, si pasa de ser cóncava hacia arriba a serlo hacia abajo o viceversa. **Justifica tu respuesta.**

$$T''(p) = 0.0008 + \frac{1600}{p^3} - \frac{60}{p^2 \ln(5)}.$$

Evaluando en puntos cercanos al punto de inflexión
 $p = 44.855$:

$$T''(44) \approx 0.0008 + 0.0188 - 0.0192 = 0.0004 > 0,$$

$$T''(46) \approx 0.0008 + 0.0164 - 0.0176 = -0.0004 < 0.$$

Por lo tanto, la concavidad cambia de **cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo** en $p = 44.855$.

- 3.3. [1.0 puntos] El grupo evalúa si es posible implementar el modelo. La condición es que el tiempo de aprendizaje óptimo sea menor a 3 horas. Indica si será posible implementar el modelo a partir de los resultados obtenidos. **Justifica tu respuesta**

Se considera que el tiempo de aprendizaje óptimo corresponde al mínimo local en $p = 21.2532$ miles de parámetros. La función del tiempo de aprendizaje es $T(p) = 0.0004p^2 + \frac{800}{p} + 60\log_5(p),$ medida en minutos. Calculamos $T(21.2532)$: $(21.2532)^2 \approx 451.7, \quad 0.0004 \times 451.7 = 0.1807,$ $\frac{800}{21.2532} \approx 37.63,$	$\log_5(21.2532) = \frac{\ln(21.2532)}{\ln(5)} \approx \frac{3.055}{1.6094} = 1.898,$ $60 \times 1.898 = 113.88.$ Sumando, $T(21.2532) \approx 0.1807 + 37.63 + 113.88 = 151.69 \text{ minutos.}$ Como $151.69 < 180$ minutos (3 horas), el tiempo óptimo es menor a 3 horas. Por lo tanto, sí es posible implementar el modelo bajo esta condición.
--	--

4. Un equipo de investigadores de mecatrónica y bioingeniería de UTEC unen fuerzas para diseñar una válvula coronaria sintética que deba permitir un flujo sanguíneo adecuado con mínima pérdida de presión. Según la ley de Poiseuille, el flujo volumétrico Q o tasa de cambio instantánea del volumen V , a través de un conducto cilíndrico está dado por la siguiente regla de correspondencia:

$$Q(r) = \frac{\pi \Delta P r^4}{8\mu L}$$

donde ΔP (constante) es la diferencia de presiones en los extremos del conducto, r es el radio del conducto, μ (constante) es la viscosidad de la sangre y L la longitud del conducto.

Además, la válvula tiene una forma tal que su radio depende de su longitud a través de la siguiente función:

$$r(L) = a \cdot 3^{-bL} L, \quad L > 0$$

donde a y b son parámetros positivos del diseño del material a utilizar.

- 4.1. [1.0 puntos] Demuestra que Q en función de L es:

$$Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot 3^{-4bL} L^3$$

Sustituyendo $r(L)$ en $Q(r)$: $Q(L) = \frac{\pi \Delta P}{8\mu L} (a \cdot 3^{-bL} L)^4 = \frac{\pi \Delta P}{8\mu L} a^4 (3^{-bL})^4 L^4$ Recordando que: $(3^{-bL})^4 = 3^{-4bL}$ Obtenemos: $Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} 3^{-4bL} L^3$

- 4.2. [1.5 puntos] Calcula la tasa de cambio instantánea del flujo volumétrico con respecto a la longitud del conducto. **Sugerencia:** Ten cuidado con las variables y constantes.

Definamos: $K = \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu}$ Entonces: $Q(L) = K \cdot 3^{-4bL} L^3$ Derivamos usando la regla del producto: $Q'(L) = K \left[\frac{d}{dL} (3^{-4bL}) L^3 + 3^{-4bL} \frac{d}{dL} L^3 \right]$ Sabemos que: $\frac{d}{dL} 3^{-4bL} = 3^{-4bL} \cdot \ln(3) \cdot (-4b)$ y $\frac{d}{dL} L^3 = 3L^2$	Por lo que: $Q'(L) = K [3^{-4bL} (-4b \ln 3) L^3 + 3^{-4bL} (3L^2)]$ $Q'(L) = K \cdot 3^{-4bL} L^2 (3 - 4b \ln 3 \cdot L)$
---	---

- 4.3. [1.5 puntos] Determina el valor de L que maximiza el flujo volumétrico mediante los criterios de primera y segunda derivada.

Para encontrar puntos críticos, igualamos la derivada a cero: $Q'(L) = 0 \implies K \cdot 3^{-4bL} L^2 (3 - 4b \ln 3 \cdot L) = 0$ Como $K > 0$, $3^{-4bL} > 0$ para $L > 0$ y $L^2 > 0$ para $L \neq 0$, se concluye que: $3 - 4b \ln 3 \cdot L = 0 \implies L = \frac{3}{4b \ln 3}$ $Q''(L) = K \frac{d}{dL} [3^{-4bL} L^2 (3 - 4b \ln 3 \cdot L)]$	$Q''(L) = K \cdot 3^{-4bL} [-4b \ln(3) L^2 (3 - 4b \ln 3 \cdot L) + 2L(3 - 4b \ln 3 \cdot L) - 4b \ln(3) L^2]$ Evaluamos en $L = \frac{3}{4b \ln 3}$: $Q''\left(\frac{3}{4b \ln 3}\right) = K \cdot 3^{-4b \frac{3}{4b \ln 3}} \left[-4b \ln(3) \left(\frac{3}{4b \ln 3}\right)^2 \right]$ $Q''\left(\frac{3}{4b \ln 3}\right) < 0$ El valor $L = \frac{3}{4b \ln 3} \text{ corresponde a un máximo local de } Q(L).$
--	---

Parte 3 - Bonus

(3.0 puntos)

5. [1.0 puntos] Calcula

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{1 + 4e^{-3x}} + 6 \right)$$

Observemos que cuando $x \rightarrow -\infty$, el término e^{-3x} se comporta como:

$$e^{-3x} = e^{-(3x)} \rightarrow \infty$$

por lo tanto:

$$1 + 4e^{-3x} \rightarrow \infty$$

y así,

$$\frac{2}{1 + 4e^{-3x}} \rightarrow 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{1 + 4e^{-3x}} + 6 \right) = 0 + 6 = 6$$

6. [1.0 puntos] Sea

$$f(x) = [\ln(x)]^{-\cos(x)}$$

Calcula $f'(x)$. **Sugerencia:** Usa derivación logarítmica.

Sea $y = f(x) = [\ln(x)]^{-\cos(x)}$. Tomamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln y = -\cos(x) \cdot \ln(\ln(x))$$

Derivando respecto a x :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [-\cos(x) \ln(\ln(x))]$$

Aplicando regla del producto:

$$\frac{d}{dx} [-\cos(x) \ln(\ln(x))] = \sin(x) \ln(\ln(x)) - \cos(x) \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\sin(x) \ln(\ln(x)) - \frac{\cos(x)}{x \ln(x)} \right]$$

Finalmente, regresando a $f(x)$:

$$f'(x) = [\ln(x)]^{-\cos(x)} \left[\sin(x) \ln(\ln(x)) - \frac{\cos(x)}{x \ln(x)} \right]$$

7. [1.0 puntos] Calcula la derivada por definición

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

no mediante reglas de derivación, de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{2x-5}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-5} - \sqrt{2x-5}}{h}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-5} - \sqrt{2x-5}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2(x+h)-5} + \sqrt{2x-5}}{\sqrt{2(x+h)-5} + \sqrt{2x-5}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 5 - (2x-5)}{h(\sqrt{2(x+h)-5} + \sqrt{2x-5})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2(x+h)-5} + \sqrt{2x-5})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)-5} + \sqrt{2x-5}}$$

Finalmente, evaluando el límite:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

Anexo 1: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Anexo 2: Reglas básicas

- $\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 1:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!