



UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Práctica Calificada 2

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:

Nombres:

Sección:

Parte 1 (12.0 puntos)

1. Límites y continuidad

1.1. Determina los siguientes límites:

Sugerencia: Puedes usar factorización, l'Hôpital, etc.

1.1.1. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 15}$

Factorizando:

$$L = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-2)}{(x+5)(x-3)}$$

$$L = \frac{(-5)-2}{(-5)-3} = \underline{\underline{7/8}}$$

1.1.2. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/\sqrt{x}}$

Al evaluar directamente,

$$L = \frac{\ln(0^+)}{1/\sqrt{0^+}} \rightarrow \frac{8}{8}$$

$$L = \frac{u(0)}{1/\sqrt{0}} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Aplicando regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^{1/2} = \underline{0}$$

1.2. [2.0 puntos] Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 4 & -1 < x \leq 3 \\ 3x - 14 & 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

Emplea los criterios de continuidad y analiza en detalle si $f(x)$ es continua en $x = -1$.

$$\begin{aligned} \checkmark \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x^2 + 3x + 4) \\ &= -2(-1)^2 + 3(-1) + 4 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &\leftarrow \text{No puede evaluarse} \\ &\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \end{aligned}$$

$$\checkmark \nexists f(-1)$$

$\therefore f$ no es continua en $x = -1$.

2. Derivada

2.1. [2.0 puntos] Sea la función

$$h(x) = \frac{2^x \sin(x+1)}{x}$$

calcula $h'(-1)$.

calcula $h'(-1)$.

$$h'(x) = \frac{(2^x \ln 2 \cdot \sec(x+1) + 2^x \cos(x+1))x - 2^x \sec(x+1) \cdot 1}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{2^x}{x^2} (x \cdot \ln 2 \cdot \sec(x+1) + x \cos(x+1) - \sec(x+1))$$

$$\begin{aligned} h'(-1) &= \frac{1}{2} (0 + (-1) \cdot (1) - 0) \\ &= \underline{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2.2. [2.0 puntos] Deriva mediante reglas de derivación la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^{x^2} + 3}{\log_3(x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot \log_3 x - (e^{x^2} + 3) \frac{1}{x \ln 3}}{(\log_3 x)^2} \\ &= \frac{2 \ln 3 \cdot x^2 e^{x^2} \cdot \log_3 x - e^{x^2} - 3}{x \ln 3 (\log_3 x)^2} \end{aligned}$$

2.3. En la Figura 1 mostramos los gráficos de $f'(x)$ y de $f''(x)$. Considera $\text{Dom } f = [0, 7]$.

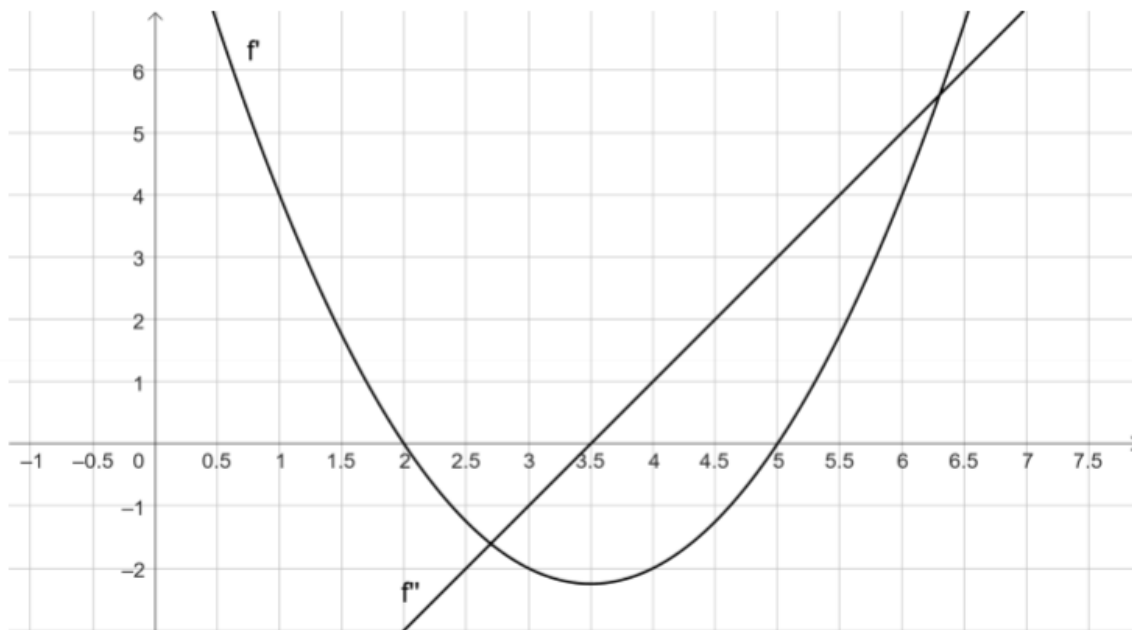
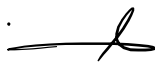


Figura 1: Gráficos de $f'(x)$ y $f''(x)$.

A partir de los gráficos en la Figura 1:

2.3.1. [1.0 puntos] Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es decreciente. Explica brevemente tu respuesta.

La función f será decreciente cuando $f'(x) < 0$.
 ↳ Del gráfico, f es decreciente en $x \in (2, 5)$,
 tomando en cuenta el dominio. 

2.3.2. [1.0 puntos] Encuentra el punto en el que la función tiene un máximo local. Explica brevemente tu respuesta.

- 2.3.2. [1.0 puntos] Encuentra el punto en el que la función tiene un máximo local. Explica brevemente tu respuesta.

La función tiene un máximo local en un punto para el cual $f' = 0$ y $f'' < 0$. Esto ocurre en $x = 2$.

Parte 2
(8.0 puntos)

$$\log_2 p = \frac{\ln p}{\ln 2}$$

3. El *tiempo de aprendizaje* T , medido en minutos, de un modelo de *Deep Learning* para Inteligencia Artificial depende de la cantidad de parámetros p , medida en miles, que contenga. Un grupo de estudiantes de UTEC estudia el tiempo de aprendizaje de cierto modelo, representado por la siguiente función:

$$T(p) = 0.0001p^2 + \frac{1500}{p} + 30\log_2(p), \quad p \in (0, 100]$$

- 3.1. [1.5 puntos] En su análisis del modelo, el grupo encontró un punto crítico para $p = 34.4681$ miles de parámetros. Indica si esto corresponde a un máximo o mínimo local del tiempo

- 3.1. [1.5 puntos] En su análisis del modelo, el grupo encontró un punto crítico para $p = 34.4681$ miles de parámetros. Indica si esto corresponde a un máximo o mínimo local del tiempo de aprendizaje. **Justifica tu respuesta.**

Nota: Los valores muy pequeños pueden ser aproximados a cero.

$$T'(p) = 0,0002p - \frac{1500}{p^2} + \frac{30}{p \ln 2}$$

$$T''(p) = 0,0002 + \frac{3000}{p^3} - \frac{30}{p^2 \ln 2}$$

Evaluamos en la segunda derivada:

$$T''(34,4681) \approx 0,037 > 0 \Rightarrow \text{Se trata de un } \underline{\text{mínimo local.}}$$

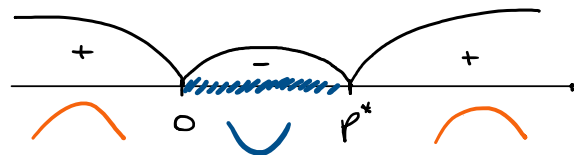
- 3.2. [1.5 puntos] El grupo, a su vez, encontró una inflexión en la curva del tiempo de aprendizaje para $p = 70.9663$ miles de parámetros. Indica el cambio de concavidad de la curva de $T(p)$ en el punto de inflexión, es decir, si pasa de ser cóncava hacia arriba a serlo hacia abajo o viceversa. **Justifica tu respuesta.**

Sea el punto indicado p^* . Despreciando el primer término en T'' ,

$$T''(p) \approx \frac{3000}{p^3} - \frac{30}{p^2 \ln 2}$$

Para tener concavidad hacia arriba: $T'' > 0$:

$$\frac{30}{p^3 \ln 2} (100 \ln 2 - p) > 0 \Rightarrow p(p - 100 \ln 2) < 0$$



En p^* se pasa de concavidad hacia arriba a hacia abajo.

- 3.3. [1.0 puntos] El grupo evalúa si es posible implementar el modelo. La condición es que el tiempo de aprendizaje óptimo sea menor a 3 horas. Indica si será posible implementar el modelo a partir de los resultados obtenidos. **Justifica tu respuesta**

tiempo de aprendizaje óptimo sea menor a 3 horas. Indica si será posible implementar el modelo a partir de los resultados obtenidos. **Justifica tu respuesta**

Evaluamos en el punto crítico:

$$T(p=34,4681) \approx 196,853 > 180 \text{ min}$$

→ No es viable el modelo.

4. Un equipo de investigadores de mecatrónica y bioingeniería de UTEC unen fuerzas para diseñar una válvula coronaria sintética que deba permitir un flujo sanguíneo adecuado con mínima pérdida de presión. Según la ley de Poiseuille, el flujo volumétrico Q o tasa de cambio instantánea del volumen V , a través de un conducto cilíndrico está dado por la siguiente regla de correspondencia:

$$Q(r) = \frac{\pi \Delta P r^4}{8 \mu L}$$

donde ΔP (constante) es la diferencia de presiones en los extremos del conducto, r es el radio del conducto, μ (constante) es la viscosidad de la sangre y L la longitud del conducto.

Además, la válvula tiene una forma tal que su radio depende de su longitud a través de la siguiente función:

$$r(L) = a \cdot 2^{-bL} L, \quad L > 0$$

donde a y b son parámetros positivos del diseño del material a utilizar.

- 4.1. [1.0 puntos] Demuestra que Q en función de L es:

$$Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8 \mu} \cdot 2^{-4bL} L^3$$

Reemplazando,

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8 \mu L} (a \cdot 2^{-bL} L)^4$$

$$Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8 \mu} 2^{-4bL} L^3$$

- 4.2. [1.5 puntos] Calcula la tasa de cambio instantánea del flujo volumétrico con respecto a la longitud del conducto. **Sugerencia:** Ten cuidado con las variables y constantes.

Calculamos

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dL} &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \left(2^{-4bl} \cdot \ln 2 \cdot (-4b) L^3 + 2^{-4bl} \cdot 3L^2 \right) \\ &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} 2^{-4bl} \cdot L^2 \left(-4b \ln 2 \cdot L + 3 \right)\end{aligned}$$

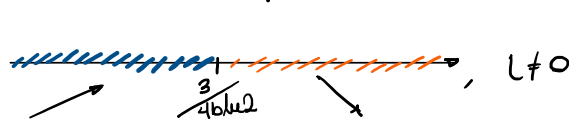
- 4.3. [1.5 puntos] Determina el valor de L que maximiza el flujo volumétrico mediante los criterios de primera y segunda derivada.

Buscamos puntos críticos:

$$Q'(L) = 0 \Rightarrow L = 0 \vee L = \frac{3}{4b \ln 2}$$

Según el cambio de signo,

$$Q'(L) > 0 \Rightarrow \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} 2^{-4bl} \cdot L^2 \left(-4b \ln 2 \cdot L + 3 \right) > 0$$



$Q(L)$ es máximo
en $L = \frac{3}{4b \ln 2}$

Parte 3 - Bonus (3.0 puntos)

5. [1.0 puntos] Calcula

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 + 4e^{3x}} + 3 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 + 4e^{3x}} + 3 \right) = 3$$

↑
expresión
exponencial

6. [1.0 puntos] Sea

$$f(x) = [\ln(x)]^{\cos(x)}$$

Calcula $f'(x)$. **Sugerencia:** Usa derivación logarítmica.

$$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln(\ln x)$$

Derivando,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln(\ln x) + \cos x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

Multiplicando por $f(x)$,

$$f'(x) = f(x) \left(-\sin x \cdot \ln(\ln x) + \frac{\cos x}{\ln x \cdot x} \right)$$

Multiplicando por $\sin$,

$$f'(x) = (\ln x)^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln(\ln x) + \frac{\cos x}{x \ln x} \right)$$

7. [1.0 puntos] Calcula la derivada por definición

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

no mediante reglas de derivación, de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{7x+5}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7(x+h)+5} - \sqrt{7x+5}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{7(x+h)+5} + \sqrt{7x+5}}{\sqrt{7(x+h)+5} + \sqrt{7x+5}} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{7x+7h+5}) - (\cancel{7x+5})}{h(\sqrt{7(x+h)+5} + \sqrt{7x+5})}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x+5}}$$

