

Práctica Calificada 2

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:
Sección:

Nombres:

Parte 1 (12.0 puntos)

1. Límites y continuidad

1.1. Determina los siguientes límites:

Sugerencia: Puedes usar factorización, l'Hôpital, etc.

1.1.1. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{-x^2 - 2x + 35}$

Demostración.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{-x^2 - 2x + 35} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{-(x^2 + 2x - 35)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 3)(x - 5)}{-(x - 5)(x + 7)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 3}{-(x + 7)} \\ &= \frac{5 - 3}{-(5 + 7)} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$



1.1.2. [2.0 puntos] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{(x - 1)^2}$

Demostración. Si calculamos el límite directamente obtenemos: $\frac{0}{0}$. Esta indeterminación permite usar L'Hospital, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x(x - 1)}$$

Sin embargo, notamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2x(x - 1)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x(x - 1)} &= +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite no existe.



1.2. [2.0 puntos] Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 4 & -1 < x < 3 \\ -5 & x = 3 \\ 3x - 14 & 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

Emplea los criterios de continuidad y analiza en detalle si $f(x)$ es continua en $x = 3$.

Demostración. Para que la función sea continua en $x = 3$, de deben cumplir las siguientes condiciones:

- Primera condición: $f(3) = -5$. Existe.
- Segunda condición: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$. En efecto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2x^2 + 3x + 4) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 14) = -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, también se cumple la tercera condición: $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ y se concluye que f es continua en $x = 3$. ■

2. Derivada

2.1. [2.0 puntos] Sea la función

$$h(x) = 27 \cdot 3^{x^2-3} \sin(5x)$$

calcula $h'(0)$.

Demostración. Se puede observar que $h(x)$ resulta de la multiplicación de dos funciones. Sean $f(x) = 27 \cdot 3^{x^2-3}$ y $g(x) = \sin(5x)$. Por teoría, sabemos que:

$$h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Luego, derivando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 27 \cdot 3^{x^2-3} \cdot \ln(3) \cdot (x^2 - 3)' = 54 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot 3^{x^2-3} \\ g'(x) &= 5 \cdot \cos(5x) \end{aligned}$$

Reemplazando estas derivadas en $h'(x)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 54 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot 3^{x^2-3} \cdot \sin(5x) + 27 \cdot 3^{x^2-3} \cdot 5 \cdot \cos(5x) \\ &= 54 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot 3^{x^2-3} \cdot \sin(5x) + 135 \cdot 3^{x^2-3} \cdot \cos(5x) \end{aligned}$$

■

2.2. [2.0 puntos] Deriva mediante reglas de derivación la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3^{x^2-1}}{\cos(x+3)}$$

Demostración. Se puede observar que $f(x)$ se conforma por la división de dos funciones. Sea $g(x) = 3^{x^2-1}$ y $h(x) = \cos(x+3)$, Por teoría, sabemos que:

$$f(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

Luego, derivando:

$$g'(x) = 3^{x^2-1} \cdot \ln(3) \cdot (x^2 - 1)' = 2 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot 3^{x^2-1}$$

$$h'(x) = -\sin(x+3)$$

Reemplazando estas derivadas en $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot 3^{x^2-1} \cdot \cos(x+3) - 3^{x^2-1} \cdot [-\sin(x+3)]}{[\cos(x+3)]^2} \\ &= \frac{2 \cdot \ln(3) \cdot x \cdot 3^{x^2-1} \cdot \cos(x+3) + 3^{x^2-1} \cdot \sin(x+3)}{\cos^2(x+3)} \end{aligned}$$



2.3. En la Figura 1 mostramos los gráficos de $f'(x)$ y de $f''(x)$. Considera $\text{Dom } f = [0, 7]$.

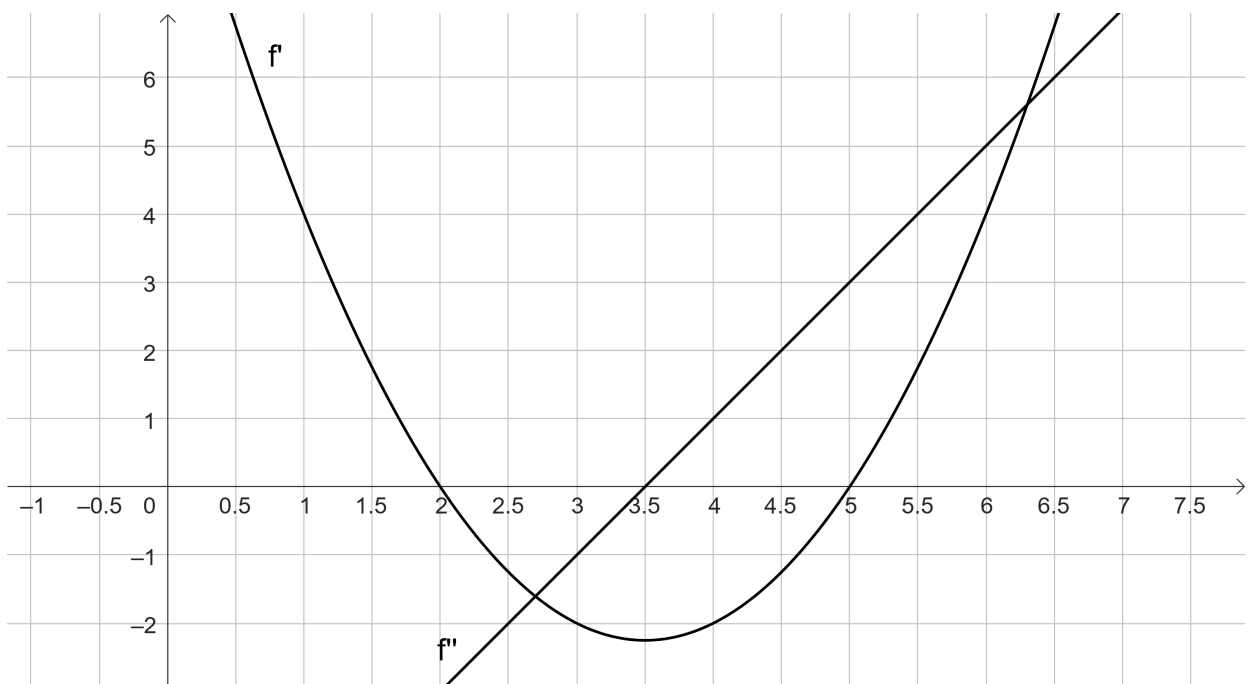


Figura 1: Gráficos de $f'(x)$ y $f''(x)$.

A partir de los gráficos en la Figura 1:

- 2.3.1. **[1.0 puntos]** Escribe los intervalos en los que la función $f(x)$ es decreciente. Explica brevemente tu respuesta.

Demostración. La función g será decreciente en el intervalo donde su derivada sea negativa; es decir: $\langle 2; 5 \rangle$. ■

- 2.3.2. **[1.0 puntos]** Escribe los intervalos de concavidad negativa. Explica brevemente tu respuesta.

Demostración. Para que se de la concavidad negativa o hacia abajo se debe cumplir que $f''(x) < 0$. Esto ocurre en $x = [0; 3.5]$ ■

Parte 2

(8.0 puntos)

3. El *tiempo de aprendizaje* T , medido en minutos, de un modelo de *Deep Learning* para Inteligencia Artificial depende de la cantidad de parámetros p , medida en miles, que contenga. Un grupo de estudiantes de UTEC estudia el tiempo de aprendizaje de cierto modelo, representado por la siguiente función:

$$T(p) = 0.0003p^2 + \frac{2100}{p} + 50\ln(p), \quad p \in (0, 100]$$

- 3.1. [1.5 puntos] En su análisis del modelo, el grupo encontró un punto crítico para $p = 41.163$ miles de parámetros. Indica si esto corresponde a un máximo o mínimo local del tiempo de aprendizaje. **Justifica tu respuesta.**

Nota: Los valores muy pequeños pueden ser aproximados a cero.

Demostración. Hallamos segunda derivada.

$$T'(p) = 0.0006p - \frac{2100}{p^2} + \frac{50}{p}$$
$$T''(p) = 0.0006 + \frac{4200}{p^3} - \frac{50}{p^2}$$

Evaluando en $p = 41.163$, obtenemos:

$$T'(41.163) \approx 0.0247 - 1.2394 + 1.2147 \approx 0$$
$$T''(41.163) \approx 0.0006 + 0.0602 - 0.0295 = 0.0313 > 0$$

Por lo tanto, el punto $p = 41.163$ corresponde a un mínimo local del tiempo de aprendizaje. ■

- 3.2. [1.5 puntos] El grupo, a su vez, encontró una inflexión en la curva del tiempo de aprendizaje para $p = 93.9516$ miles de parámetros. Indica el cambio de concavidad de la curva de $T(p)$ en el punto de inflexión, es decir, si pasa de ser cóncava hacia arriba a serlo hacia abajo o viceversa. **Justifica tu respuesta.**

Demostración. Del problema anterior, tenemos que:

$$T''(p) = 0.0006 + \frac{4200}{p^3} - \frac{50}{p^2}$$

Ahora evaluamos en puntos cercanos al punto de inflexión $p = 93.9516$:

$$T''(93) \approx 0.0006 + 0.0052 - 0.0057 = 0.0001 > 0$$
$$T''(95) \approx 0.0006 + 0.00489 - 0.00554 = -0.00005 < 0$$

Por lo tanto, la concavidad cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en $p = 93.9516$ ■

- 3.3. [1.0 puntos] El grupo evalúa si es posible implementar el modelo. La condición es que el tiempo de aprendizaje óptimo sea menor a 3 horas. Indica si será posible implementar el modelo a partir de los resultados obtenidos. **Justifica tu respuesta**

Demostración. Evaluamos a la función T en el punto $p = 41.163$, porque se obtuvo, en el problema anterior, que dicho punto representa un mínimo local.

$$\begin{aligned} T(41.163) &= 0.0003 \cdot 41.163^2 + \frac{2100}{41.163} + 50 \cdot \ln(41.163) \\ &= 0.51 + 51.02 + 185.88 \\ T(41.163) &= 237.4 \end{aligned}$$

Como $237.4 > 180$ minutos (3 horas), entonces NO es posible implementar el modelo. ■

4. Un equipo de investigadores de mecatrónica y bioingeniería de UTEC unen fuerzas para diseñar una válvula coronaria sintética que deba permitir un flujo sanguíneo adecuado con mínima pérdida de presión. Según la ley de Poiseuille, el flujo volumétrico Q o tasa de cambio instantánea del volumen V , a través de un conducto cilíndrico está dado por la siguiente regla de correspondencia:

$$Q(r) = \frac{\pi \Delta P r^4}{8 \mu L}$$

donde ΔP (constante) es la diferencia de presiones en los extremos del conducto, r es el radio del conducto, μ (constante) es la viscosidad de la sangre y L la longitud del conducto.

Además, la válvula tiene una forma tal que su radio depende de su longitud a través de la siguiente función:

$$r(L) = a \cdot 2^{-4bL}, \quad L > 0$$

donde a y b son parámetros positivos del diseño del material a utilizar.

- 4.1. [1.0 puntos] Demuestra que Q en función de L es:

$$Q(L) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8 \mu} \cdot 2^{-16bL} L^3$$

Demostración. Sustituimos $r(L)$ en $Q(L)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} Q(L) &= \frac{\pi \Delta P r^4}{8 \mu L} \\ &= \frac{\pi \Delta P (a \cdot 2^{-4bL})^4}{8 \mu L} \\ &= \frac{\pi \Delta P a^4 \cdot 2^{-16bL} L^4}{8 \mu L} \\ &= \frac{\pi \Delta P a^4 \cdot 2^{-16bL} L^3}{8 \mu} \\ Q(L) &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8 \mu} \cdot 2^{-16bL} L^3 \end{aligned}$$

Tal cual se quería demostrar. ■

- 4.2. [1.5 puntos] Calcula la tasa de cambio instantánea del flujo volumétrico con respecto a la longitud del conducto. **Sugerencia:** Ten cuidado con las variables y constantes.

Demostración. Nos piden calcular la primera derivada de Q , para ello empleamos la regla del producto y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} Q'(L) &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot \left(2^{-16bL} L^3 \right)' \\ &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot \left(2^{-16bL} \cdot \ln(2) \cdot (-16b) \cdot L^3 + 2^{-16bL} \cdot 3 \cdot L^2 \right) \\ Q'(L) &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot 2^{-16bL} \cdot L^2 \cdot (3 - 16bL \ln(2)) \end{aligned}$$

■

- 4.3. [1.5 puntos] Determina el valor de L que maximiza el flujo volumétrico mediante los criterios de primera y segunda derivada.

Demostración. Primero calculamos los puntos críticos a partir de $Q'(L) = 0$:

$$\frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot 2^{-16bL} \cdot L^2 \cdot (3 - 16bL \ln(2)) = 0$$

Como $\frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} > 0$, $L > 0$ y $2^{-16bL} > 0$; la ecuación de arriba se reduce a:

$$\begin{aligned} 3 - 16bL \ln(2) &= 0 \\ L &= \frac{3}{16b \ln(2)} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la segunda derivada de $Q(L)$:

$$\begin{aligned} Q''(L) &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot \frac{d}{dL} \left(2^{-16bL} \cdot L^2 \cdot (3 - 16bL \ln(2)) \right) \\ &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot \left(2^{-16bL} \cdot \ln(2) \cdot (-16b) \cdot L^2 \cdot (3 - 16bL \ln(2)) + \right. \\ &\quad \left. 2^{-16bL} \cdot 2L \cdot (3 - 16bL \ln(2)) + \right. \\ &\quad \left. 2^{-16bL} \cdot L^2 \cdot (-16b \ln(2)) \right) \\ &= \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot \left[2^{-16bL} \cdot (3 - 16bL \ln(2)) (2L - 16bL^2 \ln(2)) - 16bL^2 \ln(2) \cdot 2^{-16bL} \right] \end{aligned}$$

Luego, evaluamos a $Q''(L)$ en $L = \frac{3}{16b \ln(2)}$ y tenemos que

$$Q''\left(\frac{3}{16b \ln(2)}\right) = \frac{\pi \Delta P a^4}{8\mu} \cdot \left(-16b \cdot \left(\frac{3}{16b \ln(2)}\right)^2 \ln(2) \cdot 2^{-\frac{3}{\ln(2)}} \right)$$

De donde, $Q''\left(\frac{3}{16b \ln(2)}\right) < 0$. Por lo tanto, $\frac{3}{16b \ln(2)}$ corresponde a un máximo local. ■

Parte 3 - Bonus

(3.0 puntos)

5. [1.0 puntos] Calcula

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15}{1 + 9e^{3x}} + 7 \right)$$

Demostración. Notamos lo siguiente:

- Si $x \rightarrow +\infty$, entonces $e^{3x} \rightarrow +\infty$.
- Si $e^{3x} \rightarrow +\infty$, entonces $1 + 9e^{3x} \rightarrow +\infty$.
- Si $e^{3x} \rightarrow +\infty$, entonces $\frac{15}{1+9e^{3x}} \rightarrow 0$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15}{1 + 9e^{3x}} + 7 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15}{1 + 9e^{3x}} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 7 \\ &= 0 + 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$



6. [1.0 puntos] Sea

$$f(x) = [\ln(x)]^{\sin(-x)}$$

Calcula $f'(x)$. **Sugerencia:** Usa derivación logarítmica.

Demostración. Aplicando logaritmo a ambos lados de la función:

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln \left([\ln(x)]^{\sin(-x)} \right) \\ &= \sin(-x) \cdot \ln(\ln(x)) \end{aligned}$$

Derivando implícitamente y recordando que $\sin(-x) = -\sin(x)$ y $\cos(-x) = \cos(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= -\cos(-x) \ln(\ln(x)) + \sin(-x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= y \cdot \left(-\cos(-x) \ln(\ln(x)) + \sin(-x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \right) \\ y' &= [\ln(x)]^{-\sin(x)} \cdot \left(-\cos(x) \ln(\ln(x)) - \frac{\sin(x)}{x \cdot \ln(x)} \right) \end{aligned}$$



7. [1.0 puntos] Calcula la derivada por definición

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

no mediante reglas de derivación, de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{7x-9}$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7(x+h)-9} - \sqrt{7x-9}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7(x+h)-9} - \sqrt{7x-9}}{h} \cdot \frac{\sqrt{7(x+h)-9} + \sqrt{7x-9}}{\sqrt{7(x+h)-9} + \sqrt{7x-9}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(7(x+h)-9) - (7x-9)}{h \cdot (\sqrt{7(x+h)-9} + \sqrt{7x-9})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h}{h \cdot (\sqrt{7(x+h)-9} + \sqrt{7x-9})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7}{\sqrt{7(x+h)-9} + \sqrt{7x-9}} \end{aligned}$$

Evaluando el límite tenemos

$$f'(x) = \frac{7}{\sqrt{7(x+0)-9} + \sqrt{7x-9}} = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{7x-9}}$$



Anexo 1: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Anexo 2: Reglas básicas

- $\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 1:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!