

Práctica Calificada 2

Nombres y Apellidos:

Sección:

Parte I

1. Límites y Continuidad.

Considere las funciones:

$$f(x) = \frac{9x - 16x^3}{3 - 4x}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{kx}, & 0 \leq x < 4 \\ x + 3, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}, \quad h(x) = \frac{x}{2x + \ln(x) + \frac{5}{x^3}} \quad (1)$$

y responda las siguientes preguntas.

1.1. **(2.0pts)** Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$. **Sugerencia:** Puede usar factorización, l'Hôpital, etc.

Demostración. El límite puede escribirse como

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{9x - 16x^3}{3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{x(9 - 16x^2)}{3 - 4x}$$

por diferencia de cuadrados se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{x(3 - 4x)(3 + 4x)}{3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} x(3 + 4x)$$

habiendo levantado la indeterminación, evaluamos

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = \frac{3}{4} \left(3 + 4 \left(\frac{3}{4} \right) \right) = \frac{9}{2}$$

1.2. **(2.0pts)** Determine el valor de k de tal forma que $g(x)$ sea continua en su dominio.

Solución: Para que la función sea continua en su dominio, debemos analizar en $x = 4$.

- Primera condición: $g(4) = 4 + 3 = 7 \rightarrow g(4)$ existe
- Segunda condición: $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) \rightarrow e^{4k} = 7$
- Tercera condición: $g(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$

entonces

$$e^{4k} = 7$$

$$4k = \ln(7)$$

$$k = \frac{\ln(7)}{4} \approx 0.49$$

1.3. **(2.0pts)** Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. **Sugerencia:** Puede usar factorización, l'Hôpital, etc.

Demostración. Si calculamos el límite directamente obtenemos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$. Esta indeterminación permite usar L'Hospital, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx}(2x + \ln(x) + \frac{5}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x} - \frac{15}{x^4}}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2} = 0.5$$

2. Derivación.

2.1. **(2.0pts)** Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones derivables, tal que se define

$$Z(x) = 2q(x) \ln[p(x)] \quad (2)$$

Determine el valor de $Z'(a)$, si se cumplen las siguientes condiciones

$$p(a) = a, \quad p'(a) = 1, \quad q(a) = e^2 \quad \text{y} \quad q'(a) = -\frac{2e^2}{a}$$

Demostración. Derivando la función

$$Z(x) = 2 \left[q'(x) \ln[p(x)] + q(x) \cdot \frac{p'(x)}{p(x)} \right]$$

Evalutando en $x = a$:

$$Z(a) = 2 \left[q'(a) \ln[p(a)] + q(a) \cdot \frac{p'(a)}{p(a)} \right]$$

$$Z(a) = 2 \left[-\frac{2e^2}{a} \ln(a) + e^2 \cdot \frac{1}{a} \right]$$

$$Z(a) = \frac{2e^2}{a} (1 - 2 \ln(a))$$

2.2. (2.0pts) Considere la función

$$U(x) = \frac{e^{-x} \cos(2x)}{x} \quad (3)$$

y determine su derivada haciendo uso de las reglas de derivación.

Demostración. Se puede observar que $U(x)$ se conforma por la división de dos funciones. Sea $f(x) = e^{-x} \cos(2x)$ y $g(x) = x$, entonces:

$$U(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Luego, derivando:

$$f'(x) = -e^{-x} \cos(2x) - 2e^{-x} \sin(2x)$$

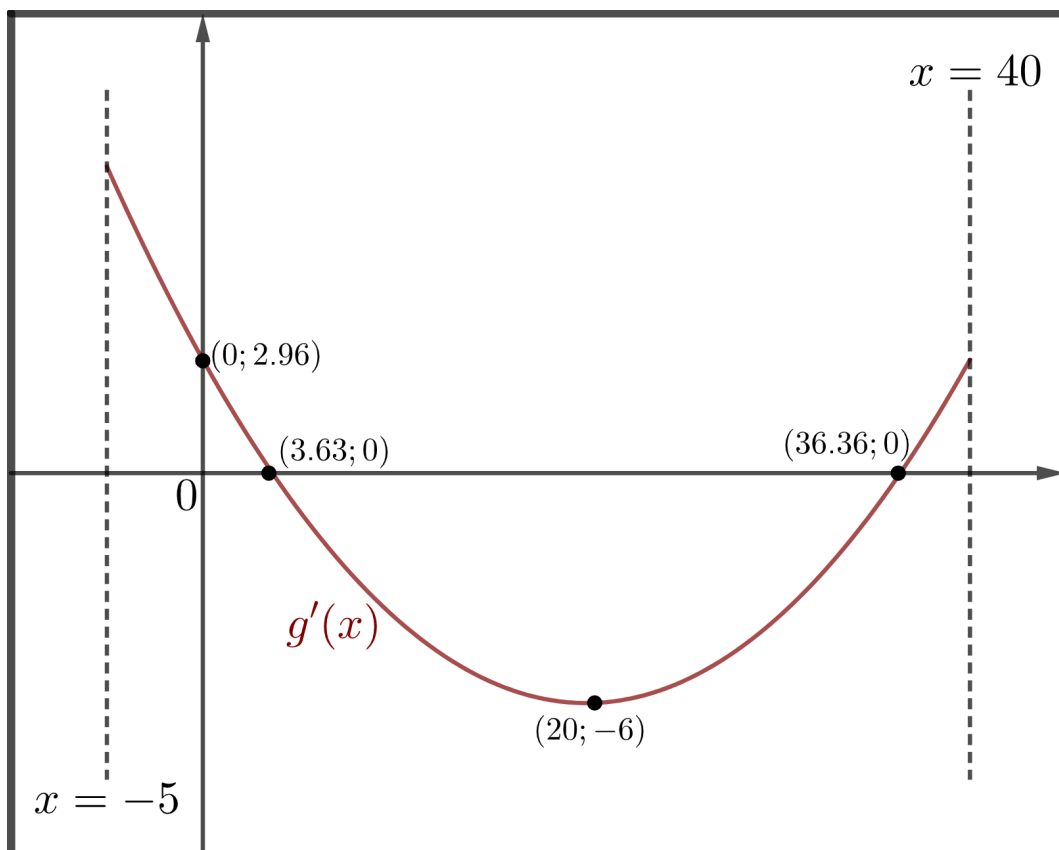
$$g'(x) = 1$$

reemplazando estas derivadas en $U'(x)$

$$U'(x) = \frac{(-e^{-x} \cos(2x) - 2e^{-x} \sin(2x)) \cdot x - (e^{-x} \cos(2x)) \cdot 1}{x^2}$$

$$U'(x) = \frac{-(x+1)e^{-x} \cos(2x) - 2xe^{-x} \sin(2x)}{x^2}$$

2.3. El siguiente gráfico corresponde a la derivada de la función $g(x)$



2.3.a. (1.0pts) Indique, argumentando su respuesta, el intervalo en donde $g(x)$ es creciente.

Demostración. La función g será creciente en el intervalo donde su derivada sea positiva; es decir: $[-5; 3.63) \cup (36.36; 40]$ ■

2.3.b. (1.0pts) Determine si existe algún valor de x en el que la función g alcanza un máximo. De existir, indique el valor y justifique la respuesta.

Demostración. Los cortes con el eje horizontal representan los puntos críticos. Se tendrá un máximo a cuando al pasar por un punto crítico, la derivada cambie de signo de positivo a negativo. Esto ocurre en $x = 3.63$ ■

Parte II

3. En el desarrollo de una aplicación de Realidad Aumentada (RA) para entrenamiento médico, se utiliza un algoritmo de procesamiento de imágenes para identificar y clasificar instrumentos quirúrgicos en tiempo real. El rendimiento de este algoritmo es crítico, ya que afecta directamente la fluidez de la experiencia de RA. Para un algoritmo de prueba, el tiempo de procesamiento T (en milisegundos) depende del número de objetos n (en cientos de objetos) a analizar en una escena, según la expresión:

$$T(n) = \frac{1}{4}n^2(n^2 - 4n + 8)e^{-n} \quad (4)$$

- 3.1. (2.0pts) En una escena arbitraria se tienen 200 objetos. Determine si esta cantidad corresponde a un máximo, un mínimo o si no proporciona información sobre el tiempo T de procesamiento.

Solución: La función se puede escribir como $T(n) = \frac{1}{4}(n^4 - 4n^3 + 8n^2)e^{-n}$

Derivando la función

$$T'(n) = \frac{1}{4}[(4n^3 - 12n^2 + 16n)e^{-n} - (n^4 - 4n^3 + 8n^2)e^{-n}]$$

$$T'(n) = \frac{1}{4}(-n^4 + 8n^3 - 20n^2 + 16n)e^{-n}$$

como $n = 2$ (200 objetos), por el criterio de la primera derivada podemos evaluar:

- $n = 1.8 \rightarrow T'(1.8) = 0.006 > 0$
- $n = 2.1 \rightarrow T'(2.1) = 0.0012 > 0$

No hay cambio en el signo de la derivada, por lo tanto 200 objetos no maximiza ni minimiza el tiempo de procesamiento.

- 3.2. **(2.0pts)** El rendimiento del algoritmo se verá afectado cuando la concavidad de T cambie de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Determine si habrá un cambio en el rendimiento de algoritmo si 310 objetos representa un punto de inflexión.

Solución: Derivando por segunda vez

$$T''(n) = \frac{1}{4} [(-4n^3 + 24n^2 - 40n + 16)e^{-n} - (-n^4 + 8n^3 - 20n^2 + 16n)e^{-n}]$$

$$T''(n) = \frac{1}{4} (n^4 - 12n^3 + 44n^2 - 56n + 16)e^{-n}$$

Se analiza el cambio de signo de la segunda derivada al pasar por $n = 3.10$ (310 objetos)

- $n = 3 \rightarrow T''(3) = 0.0012 > 0$
- $n = 3.2 \rightarrow T''(3.2) = -0.01 < 0$

El signo de la segunda derivada cambia de $+$ a $-$ por lo que T pasa cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. El rendimiento NO se verá afectado.

4. Un grupo de ingenieros está desarrollando un satélite de comunicaciones de nueva generación, el cual requiere un nuevo tipo de antena desplegable para maximizar la cobertura de señal en órbita. Una vez que el satélite se encuentre en el espacio, la antena se despliega automáticamente adoptando una forma cónica. Se sabe que el volumen del cono (V), su altura (h) y el radio de su base (r) se expresan respectivamente como:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad h = \sqrt{k^2 - r^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{k\theta}{2\pi} \quad (5)$$

donde k es una constante positiva y θ es el ángulo de despliegue, el cual varía en el intervalo $\langle 0, 2\pi \rangle$.

- 4.1. **(1.0pts)** Demuestre que el volumen del cono depende del ángulo de despliegue según

$$V(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (6)$$

Solución: La altura h en términos de θ queda como $h = \sqrt{k^2 - \frac{k^2\theta^2}{4\pi^2}}$. Luego, al reemplazar h y r en el volumen

$$V(\theta) = \frac{\pi}{3} \frac{k^2\theta^2}{4\pi^2} \sqrt{k^2 - \frac{k^2\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{\pi}{3} \frac{k^2\theta^2}{4\pi^2} \sqrt{\frac{k^2(4\pi^2 - \theta^2)}{4\pi^2}} = \frac{\pi k^2\theta^2}{12\pi^2} \frac{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}{2\pi}$$

$$V(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

- 4.2. (1.5pts) Haga uso de la ecuación (6) y demuestre que la tasa de variación instantánea del volumen respecto a θ se expresa como:

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] \quad (7)$$

Solución: Derivando respecto a θ

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[2\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} + \theta^2 \frac{(-2\theta)}{2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[2\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

operando

$$V'(\theta) = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{2\theta(4\pi^2 - \theta^2) - \theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] = \frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

- 4.3. (1.5pts) A partir de la ecuación (7) determine, justificando adecuadamente, el ángulo óptimo de despliegue que maximice el volumen de la antena, garantizando así la mayor área de cobertura para las comunicaciones.

Solución: Los puntos críticos los obtenemos de:

$$\frac{k^3}{24\pi^2} \left[\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right] = 0$$

de donde tenemos

$$\theta(8\pi^2 - 3\theta^2) = 0$$

entonces $\theta = 0$ (descartado porque no pertenece al dominio) o

$$3\theta^2 - 8\pi^2 = 0 \longrightarrow \theta = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \text{ rad} \approx 5.13 \text{ rad}$$

Para verificar que se trata de un máximo, podemos evaluar la derivada en puntos cercanos antes y después del punto crítico, es decir

- para $\theta = 5$ rad, se tiene $V'(5) \approx 0.02$.
- para $\theta = 5.2$ rad, se tiene $V'(5.2) \approx -0.01$.

Como la derivada cambia de signo de positivo a negativo, se verifica que el ángulo hallado maximiza el volumen de la antena cónica.

Bonus

5. (1.0pts) Sea la función

$$y(x) = x^{\ln(x)}$$

Calcule $y'(x)$ haciendo uso de derivación logarítmica.

Demostración. Aplicando logaritmo a ambos lados de la función

$$\ln(y) = \ln(x^{\ln(x)}) = \ln(x) \cdot \ln(x) = \ln^2(x)$$

derivando implícitamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}y' &= 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= y \cdot \frac{2 \ln(x)}{x} = \frac{2 \cdot \ln(x) \cdot x^{\ln(x)}}{x}\end{aligned}$$

6. (1.0pts) Sea la función definida como

$$F(x) = \frac{2x}{2x - k} \quad (8)$$

Determine $F'(x)$ por medio de la definición de derivada: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{2(x+h)-k} - \frac{2x}{2x-k}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)(2x-k) - 2x(2(x+h)-k)}{h(2(x+h)-k)(2x-k)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2xk + 4xh - 2hk - 4x^2 - 4xh + 2xk}{h(2(x+h)-k)(2x-k)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hk}{h(2(x+h)-k)(2x-k)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2k}{(2(x+h)-k)(2x-k)}\end{aligned}$$

evaluando el límite tenemos

$$F'(x) = \frac{-2k}{(2(x+0)-k)(2x-k)} = \frac{-2k}{(2x-k)^2}$$

7. (1.0pts) Sea la función definida como

$$f(x) = nx^2 + 2nx + 8C$$

donde C es una constante y $n \neq 0$. Determine el punto x en el cual la recta tangente a f es paralela a la recta $y(x) = 4x + \pi$. Exprese su respuesta en función de n .

Demostración. Derivando la función tenemos:

$$m = f' = 2nx + 2n$$

como la recta tangente a f en el punto x debe ser paralela a $y = 4x + \pi$, entonces

$$4 = 2nx + 2n$$

$$x = \frac{4 - 2n}{2n}$$

Entonces, en el punto $x = \frac{4 - 2n}{2n}$, la función f tendrá una recta tangente paralela a y . ■

Anexo 1: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Anexo 2: Reglas básicas

- $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Práctica Calificada 2

Cálculo de una Variable

2025 - 1

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 2:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!