

Práctica Calificada 2

Cálculo de una Variable

2025 - 0

La Evaluación es INDIVIDUAL

Actos de Dishonestidad:

En caso se detecte que el estudiante esté cometiendo un acto de deshonestidad académica, ya sea copia, plagio, u otra; o es perpetrador, cómplice o tenga conocimiento y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, clasificándose la evaluación con nota **CERO y sin opción de recuperación**.

Indicaciones:

- Este examen consta de dos partes:
 - Parte I, con un total de 9 puntos.
 - Parte II, con un total de 11 puntos.
- Debe colocar su nombre completo en el recuadro indicado y en la parte superior de cada hoja de la evaluación.
- Debe mantener siempre sobre la carpeta su documento de identidad (DNI, carné de extranjería, carné universitario, etc).
- La duración de la evaluación es de 100 minutos.
- Escribir preferentemente con lapicero azul o negro. Evitar el uso de lapicero rojo o lápiz (con el fin de evitar problemas de resolución en el escaneo).
- Se permite el uso de calculadora científica (no se permiten graficadoras).
- No se permite el uso de celulares ni de ningún otro dispositivo electrónico, a riesgo de anulación del examen.
- No desglosar las hojas de la evaluación.
- Finalizado el tiempo, deberán entregar su evaluación siguiendo las indicaciones que se den.
- Los profesores y/o asistentes tienen la potestad de anular el examen a quien desobedezca las indicaciones que se den.

Práctica Calificada 2

Nombres y Apellidos:

Firma:

Parte I

1. Determine si las proposiciones son verdaderas o falsas.

1a. **(0.5pts)** Si una función $f(x)$ es derivable en $x = x_0$, entonces la función es continua en $x = x_0$.

- ☐ Verdadero.

☐ Falso.

1b. **(0.5pts)** Si una función $f(x)$ es continua en $x = x_0$, entonces la función es derivable en $x = x_0$.

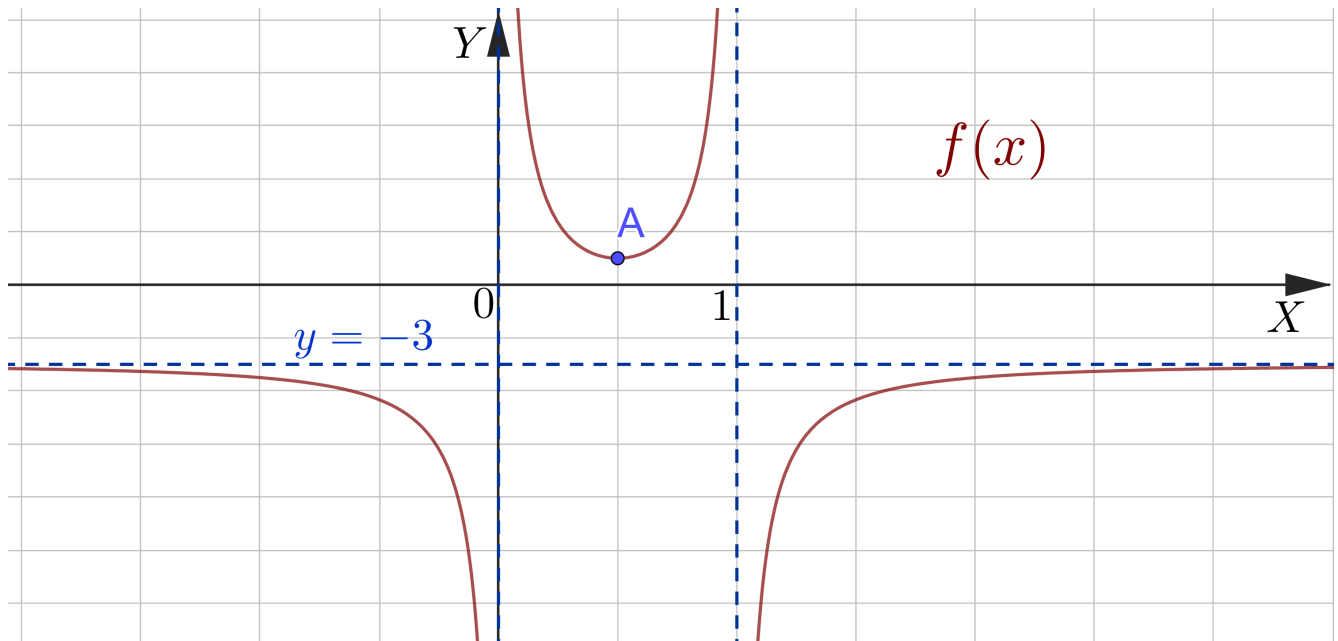
- ☐ Verdadero.

☐ Falso.

2. Se tiene la función $f(x)$ y sus dos primeras derivadas definidas como:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{x - x^2}, \quad f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2(3x^2 - 3x + 1)}{x^3(x - 1)^3}$$

Además, se muestra el gráfico de la función $f(x)$ (línea continua) y sus respectivas asíntotas (líneas punteadas).



2a. A partir de la gráfica escriba el valor de los siguientes límites de $f(x)$:

2a-1. **(0.25pts)** $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ _____

2a-2. **(0.25pts)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ _____

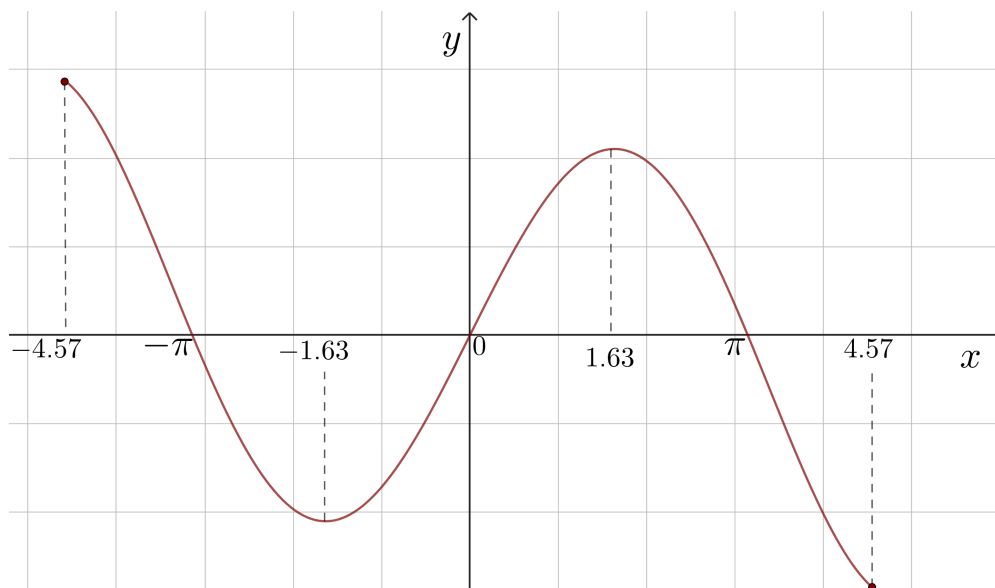
2a-3. **(0.25pts)** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ _____

2a-4. **(0.25pts)** ¿Qué representa la ecuación $y = -3$ para la función?

2b. **(1.0pts)** Determine las coordenadas del punto A y verifique matemáticamente que se trata de un mínimo.

Solución:

3. La siguiente figura muestra el gráfico correspondiente **a la derivada** de la función $h(x)$, definida en el intervalo $[-4.57, 4.57]$.



Determine, justificando adecuadamente, lo siguiente:

- 3a. **(0.5pts)** Los intervalos en los que $h(x)$ es creciente y decreciente.
- 3b. **(0.5pts)** Los valores de x donde la función $h(x)$ tiene máximos y mínimos.
- 3c. **(0.5pts)** Los valores de x donde la función $h(x)$ tiene puntos de inflexión.
- 3d. **(0.5pts)** Los intervalos en los que $h(x)$ es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Nota: No es necesario determinar ninguna regla de correspondencia.

Solución:

4. **(2.0pts)** Sea la función definida como

$$\beta(x) = (2n + 1) x e^{-4x/n}$$

Determine el valor que debe tomar n (n es constante $\neq 0$) de tal forma que $\beta(x)$ tenga un posible punto de inflexión en $x = 5$.

Solución:

5. **(2.0pts)** Verifique, mediante los cálculos correspondientes, que dada la función implícita

$$e^y \tan(x) - 2x - 10 = 0$$

se cumple que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^y \sec^2(x)}{e^y \tan(x)}$$

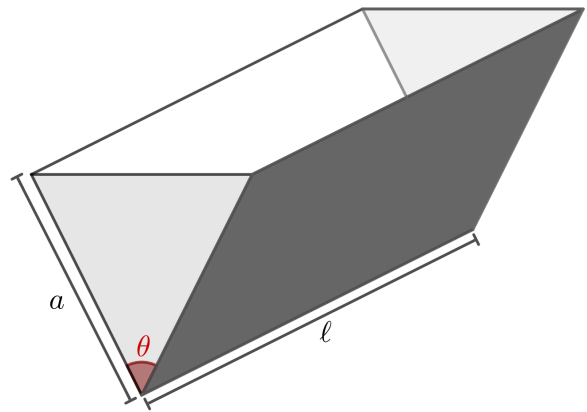
Solución:

Parte II

6. La sección transversal de un bebedero tiene la forma de un triángulo isósceles invertido. Los lados iguales del triángulo miden a metros y el largo mide ℓ metros, como se muestra en la figura:

- 6a. **(1.0pts)** Demuestre que el volumen V del bebedero en función del ángulo θ que forman sus lados iguales se expresa como

$$V(\theta) = \frac{a^2 \ell}{2} \sin(\theta)$$



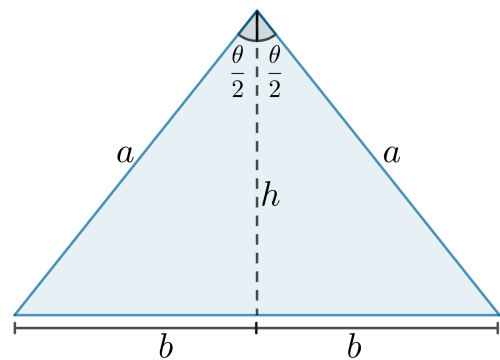
Sugerencia:

El volumen puede calcularse como el área de la sección transversal multiplicada por el largo. Para el cálculo del área de un triángulo isósceles puede usar el esquema mostrado en la figura.

Use razones trigonométricas y recuerde además que:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(\text{base}) \times (\text{altura})$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$



Solución:

Para las siguientes preguntas considere la expresión $V(\theta)$ dado en el ítem 6a.

- 6b. **(2.0pts)** Encuentre el valor del ángulo θ que maximiza la capacidad volumétrica del bebedero. Justifique que es máximo haciendo uso de cualquier criterio visto en clase.
- 6c. **(2.0pts)** Si el bebedero esta construido de tal forma que, fijando el ángulo en $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad, la longitud a aumenta a razón de 0.5 m/min y ℓ a razón de 0.25 m/min, entonces ¿Qué tan rápido varía el volumen del bebedero cuando $a = 2$ m y $\ell = 1$ m?

Solución:

7. Un equipo de bioingenieros está diseñando un bioreactor para la producción de una proteína. La eficiencia del proceso depende de la disponibilidad de nutrientes en el medio de cultivo. La concentración de nutrientes $C(t)$ (en mg/L) varía con el tiempo t (en horas) y está modelada por la función:

$$C(t) = 5te^{-0.2t} + 1.5$$

- 7a. **(2.0pts)** ¿A partir de qué hora la concentración de nutrientes $C(t)$ comienza a disminuir?
- 7b. **(2.0pts)** ¿Con qué rapidez cambia la tasa de concentración de nutrientes a las 12 horas? Interprete el resultado en contexto.
- 7c. **(2.0pts)** Se sabe que la velocidad de producción de la proteína P (en mg/L·h) depende de la concentración de nutrientes $C(t)$ según la función:

$$P(C) = 0.3C^2 - 2C + 5$$

Determine la tasa de cambio de la producción de proteína con respecto al tiempo $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ en $t = 5$ horas. ¿Está aumentando o disminuyendo la producción en ese instante?

Solución:

Solución:

Anexo: Lista de Derivadas

$$\blacksquare \frac{d}{dx} c = 0$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\blacksquare \frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$$