

Práctica Calificada 1

Cálculo de una Variable

2025 - 1

La Evaluación es INDIVIDUAL

Actos de Dishonestidad:

En caso se detecte que el estudiante esté cometiendo un acto de deshonestidad académica, ya sea copia, plagio, u otra; o es perpetrador, cómplice o tenga conocimiento y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, clasificándose la evaluación con nota **CERO y sin opción de recuperación**.

Indicaciones:

- Este examen consta de dos partes:
 - Parte I, con un total de 12 puntos.
 - Parte II, con un total de 8 puntos.
 - Bonus, con un total de 3 puntos.
- Debe colocar su nombre completo en el recuadro indicado y en la parte superior de cada hoja de la evaluación.
- Debe mantener siempre sobre la carpeta su documento de identidad (DNI, carné de extranjería, carné universitario, etc).
- La duración de la evaluación es de 100 minutos.
- Escribir preferentemente con lapicero azul o negro. Evitar el uso de lapicero rojo o lápiz (con el fin de evitar problemas de resolución en el escaneo).
- Se permite el uso de calculadora científica (no se permiten graficadoras).
- No se permite el uso de celulares ni de ningún otro dispositivo electrónico, a riesgo de anulación del examen.
- No desglosar las hojas de la evaluación.
- Finalizado el tiempo, deberán entregar su evaluación siguiendo las indicaciones que se den.
- Los profesores y/o asistentes tienen la potestad de anular el examen a quien desobedezca las indicaciones que se den.

Práctica Calificada 1

Nombres y Apellidos:

Sección:

Parte I

1. Considere las funciones:

$$f(x) = \frac{3}{9-x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 \ln(x) \quad (1)$$

y responda las siguientes preguntas:

1.1. **(1.0pts)** Determine el dominio de la función $h(x) = f(x) + g(x)$.

Solución: Los dominios de cada función son:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}, \quad \text{Dom } g = x > 0$$

luego, el dominio de $h(x)$ es:

$$\text{Dom } h = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \langle 0, 3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

1.2. **(1.5pts)** Determine el dominio de la función $w(x) = f(x-3)$.

Solución: Se tiene que:

$$w(x) = f(x-3) = \frac{3}{9-(x-3)^2} = \frac{3}{9-(x^2-6x+9)} = \frac{3}{6x-x^2} = \frac{3}{x(6-x)}$$

luego, el dominio de $w(x)$ es:

$$\text{Dom } w = \mathbb{R} - \{0, 6\}$$

1.3. **(1.5pts)** Calcule el valor de $g \circ f(\sqrt{6})$

Solución: La composición es:

$$g \circ f(x) = \left(\frac{3}{9-x^2} \right)^2 \ln \left(\frac{3}{9-x^2} \right) = \frac{9}{(9-x^2)^2} \ln \left(\frac{3}{9-x^2} \right)$$

Evaluando en $x = \sqrt{6}$:

$$g \circ f(\sqrt{6}) = \frac{9}{(9-(\sqrt{6})^2)^2} \ln \left(\frac{3}{9-(\sqrt{6})^2} \right) = \ln(1) = 0$$

2. Considere la siguiente función cuadrática

$$M(x) = x^2 - 2x + 2 \quad (2)$$

y responda las siguientes preguntas:

2.1. **(2.0pts)** Determine la función lineal $F(x)$ que pasa por los puntos $A = (0; 2)$ y $B = (n; M(n))$, en donde $n > 0$.

Solución: Calculando la pendiente de $F(x)$

$$m = \frac{M(n) - 2}{n - 0} = \frac{n^2 - 2n + 2 - 2}{n} = \frac{n^2 - 2n}{n} = n - 2$$

Luego, la función lineal adopta la forma: $F(x) = (n - 2)x + b$. Usando el punto A , entonces

$$b = 2$$

y la función lineal se expresa como

$$F(x) = (n - 2)x + 2$$

2.2. **(1.0pts)** De lo anterior, calcule el valor de n , tal que $F(x)$ sea paralela a la recta $y(x) = 5x - 3$.

Solución: Para que las rectas sean paralelas, basta que sus pendientes sean iguales. Por lo tanto

$$n - 2 = 5 \longrightarrow n = 7$$

3. **(2.5pts)** Encuentren la regla de correspondencia de la función cuadrática, cuya representación gráfica (es decir, la parábola) pase por el punto $(0; 2p)$ y su vértice se ubique en el punto $(p; p)$, sabiendo que $p \neq 0$.

Solución: Partiendo de la forma canónica de la función cuadrática con vértice en $(p; p)$

$$y(x) = a(x - p)^2 + p$$

usando el punto $(0; 2p)$

$$2p = a(0 - p)^2 + p$$

$$ap^2 - p = 0$$

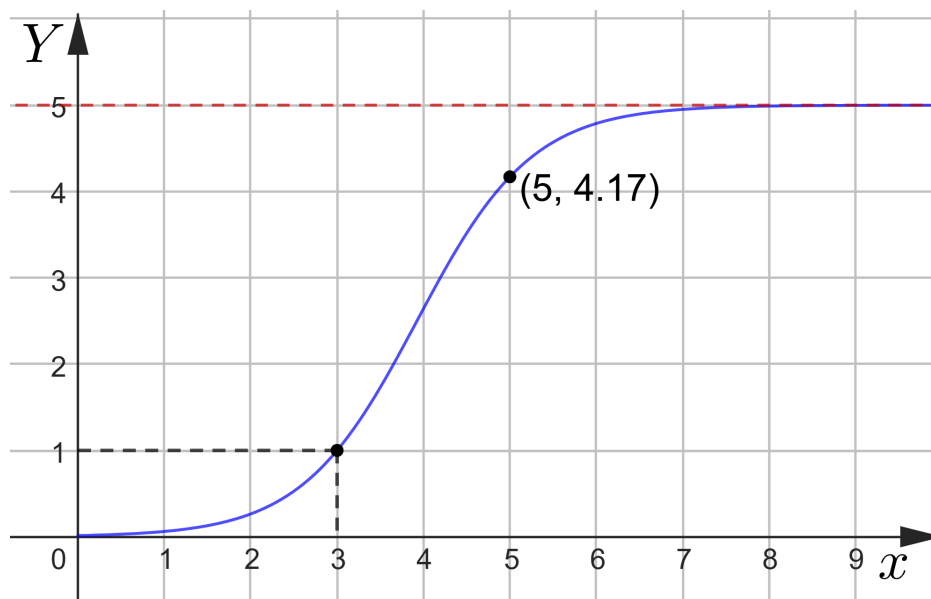
$$p(ap - 1) = 0$$

como $p \neq 0$, entonces $a = \frac{1}{p}$ y la función cuadrática se escribe como

$$y(x) = \frac{1}{p}(x - p)^2 + p$$

4. (2.5pts) Observe el siguiente gráfico y obtenga los parámetros que satisfacen el modelo:

$$Y(x) = \frac{A}{1 + B e^{-k(x-3)}} \quad (3)$$



Solución: Del gráfico se tiene $A = 5$. Además en $x = 3$ se tiene $Y(3) = 1$, entonces

$$1 = \frac{5}{1 + B e^0}$$

$$1 + B = \frac{5}{1}$$

$$B = 4$$

Ahora, usando el punto dado:

$$4.17 = \frac{5}{1 + 4 e^{-2k}}$$

Despejando

$$1 + 4 e^{-2k} = \frac{500}{417}$$

$$e^{-2k} = \frac{83}{1668}$$

aplicando $\ln$ a ambos lados de la ecuación

$$-2k = \ln\left(\frac{83}{1668}\right)$$

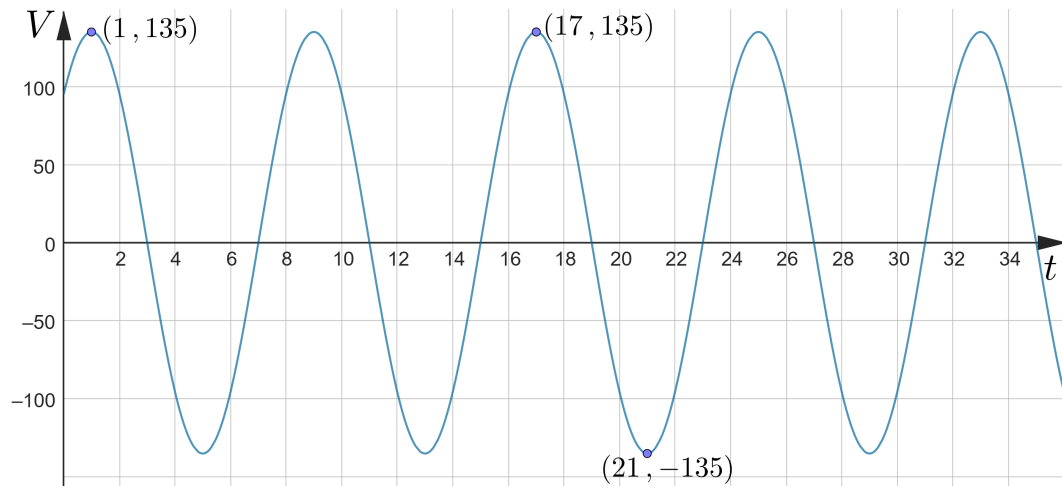
$$k = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{83}{1668}\right) \approx 1.50$$

Por lo tanto la función es

$$Y(x) = \frac{5}{1 + 4 e^{-1.50(x-3)}}$$

Parte II

5. Un grupo de estudiantes de UTEC se encuentran diseñando el prototipo de un nuevo sistema de calefacción. En un determinado punto de su investigación, observan que la variación del voltaje (en voltios) en su modelo oscila en el tiempo (en segundos) según el siguiente gráfico:



- 5.1. **(2.0pts)** Si lo mostrado sigue un comportamiento del tipo $V(t) = A \cos(Bt + C) + D$, use el gráfico para determinar cada parámetro y obtenga la función que modela el voltaje.

Solución: Se tiene $A = \frac{135 - (-135)}{2} = 135$ volts y $D = A = \frac{135 + (-135)}{2} = 0$ volts
Además, del gráfico:

$$2T = 17 - 1 \rightarrow T = 8 \text{ s}$$

Luego $B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad/s. Por lo que se tiene hasta ahora

$$V(t) = 135 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + C\right)$$

usando el punto $(1, 135)$ se tiene

$$135 = 135 \cos\left(\frac{\pi}{4} + C\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + C\right) = 1$$

por lo que

$$\frac{\pi}{4} + C = 0$$

$$C = -\frac{\pi}{4}$$

y la función queda como

$$V(t) = 135 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Por otro lado, el sistema en desarrollo cuenta con una resistencia $R = 225 \Omega$, por lo que los estudiantes ahora necesitan saber si la potencia eléctrica (en Watts) será favorable. Si la Potencia se escribe como

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (4)$$

responda las siguientes preguntas:

5.2. **(2.0pts)** Usando el resultado del ítem anterior, demuestre que la función potencia es

$$P(t) = 40.5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) + 40.5 \quad (5)$$

Nota: Recuerde la identidad trigonométrica: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$

Solución: Reemplazando el resultado anterior en (4) tenemos

$$P(t) = \frac{\left[135 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{225} = 81 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Usando la identidad trigonométrica: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$, se tiene

$$P(t) = 81 \left(\frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \right)$$

$$P(t) = 40.5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) + 40.5$$

5.3. **(1.0pts)** La potencia será favorable si en ningún instante de tiempo se supera los 42 Watts. Use la ecuación de la potencia e indique si será favorable para el sistema en desarrollo.

Solución: De la función Potencia

$$P(t) = 40.5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) + 40.5$$

El valor máximo que adopta la función cos será 1, por lo que la potencia máxima alcanzada estaría dada por

$$P_{max} = 40.5 + 40.5 = 81 \text{ Watts}$$

Este valor supera lo permitido, por lo que NO es favorable para el sistema en desarrollo.

6. A un estudiante se le ocurre introducir otra resistencia al sistema, la cual tiene un valor de $R = 100 \Omega$; sin embargo, notan que ésta empieza a decaer exponencialmente en un 20 % cada 30 segundos.

6.1. (1.0pts) Determine la función $R(t)$ que modela esta situación.

Solución:

- en $t = 0$ se tiene: $R = 100$
- en $t = 30 = 30 \times 1$ se tiene: $R = 100 - \frac{20}{100} \cdot 100 = R = 100(0.8)$
- en $t = 60 = 30 \times 2$ se tiene: $R = 100(0.8) - \frac{20}{100}100(0.8) = 100(0.8)^2$

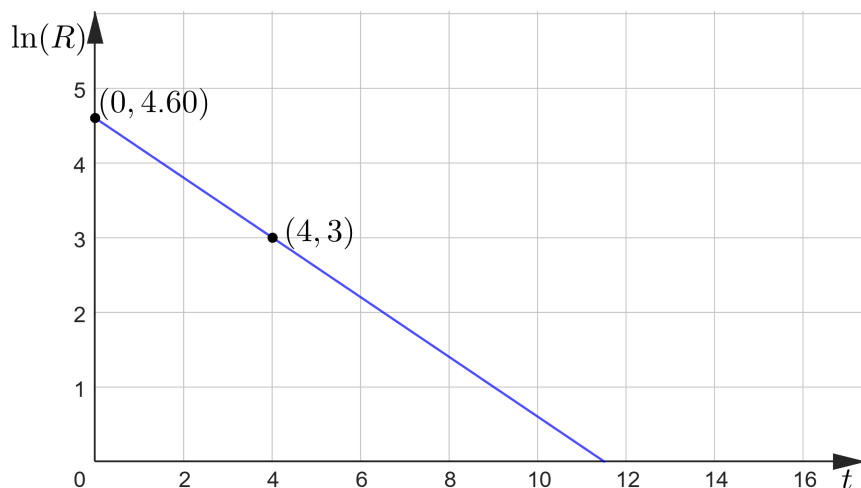
por lo que en un tiempo $t = 30 \times n$ se tiene: $R = 100(0.8)^{n-1} - \frac{20}{100}100(0.8)^{n-1} = 100(0.8)^n$ y en función del tiempo

$$R(t) = 100(0.8)^{t/30}$$

Este comportamiento les resulta curioso, por lo que deciden analizar otra resistencia del tipo

$$R(t) = 100e^{-kt} \quad (6)$$

Pero solo les será útil si el coeficiente k se encuentra en el intervalo $\langle 0, 0.5 \rangle$, ya que esto evita que la resistencia decaiga muy rápido. La única información con la que cuentan es el siguiente gráfico



- 6.2. (2.0pts) En base a esta información, determine el valor de k , e indique si la resistencia les será útil. De ser así, el proyecto de los estudiantes estará en buen camino.

Nota: Recuerde las propiedades: $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \mid \log_b(x^r) = r \log_b(x)$

Solución: Aplicando $\ln$ en ambas partes de la ecuación (6), se tiene $\ln(R) = \ln(100e^{-kt})$. Además, por la propiedad $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ tenemos

$$\ln(R) = \ln(100) + \ln(e^{-kt}) = -kt + \ln(100)$$

la cual es una función lineal cuya pendiente es igual a $-k$. Luego, del gráfico

$$m = \frac{3 - 4.60}{4 - 0} = -0.4$$

por lo que se tiene finalmente $k = 0.4$. Este valor es adecuado según el contexto.

Bonus

7. (1.0pts) Sea la función cuadrática

$$f(x) = -3(x - 4)^2 + 1$$

Indica la posición del vértice de $g(x) = f(x + 6) - 1$.

Solución: El vértice inicial es $V = (4, 1)$. Luego:

- Desplazamiento horizontal 6 unidades a la izquierda: $V \rightarrow V_1 = (-2, 1)$
- Desplazamiento vertical 1 unidad hacia abajo: $V_1 \rightarrow V_2 = (-2, 0)$

El vértice de $g(x)$ es $V_2 = (-2, 0)$.

8. (1.0pts) Determina el rango de la siguiente función: $f(x) = 2 \sin(5x - 4) + 4$

Solución: La función sin toma como valores máximos 1 o -1. Luego la función varía entre ± 2 . Además, se desplaza 4 unidades hacia arriba, por lo que la función varía entre 2 y 6. Entonces

$$\text{Ran } f = [2, 6]$$

9. (1.0pts) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3 \cos(x) + 3$$

Esboce sobre la línea punteada en la [Figura 1](#) el gráfico de $-f(x)$.

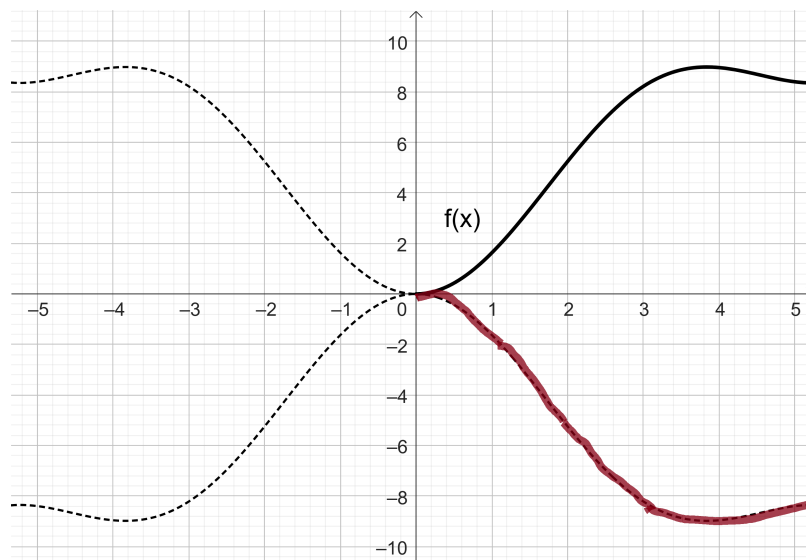


Figura 1: En negro, el gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3 \cos(x) + 3$.