

Práctica Calificada 1 - Modelo 4

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:
Sección:

Nombres:

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 1:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!

Parte 1

1. Sean dos funciones:

$$f(x) = 2x - 8$$

$$g(x) = \sqrt{27 - 3x^2}$$

1.1. [1.0 puntos] Encuentra el dominio de $g(x-3)$.

$$g(x-3) = \sqrt{27 - 3(x-3)^2}$$

$$27 - 3(x-3)^2 \geq 0$$

$$9 \geq (x-3)^2$$

$$0 \geq x^2 - 6x + 9 - 9$$

$$0 \geq x^2 - 6x$$

$$0 \geq x(x-6)$$

$$\text{Dom } g(x-3) = [0; 6]$$

1.2. [1.5 puntos] Encuentra el dominio de la función $f(x)/g(x)$.

$$\text{Dom } f/g = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g - \{x \in D_g / g(x) = 0\} \quad ; \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Para $\text{Dom } g$: $27 - 3x^2 > 0$
 $g(x) \neq 0$ $0 > x^2 - 9$
 $0 > (x-3)(x+3)$

$$\text{Dom } g =]-3; 3[\rightarrow \text{Dom } f/g =]-3; 3[$$

1.3. [1.5 puntos] Calcula $f \circ g(3)$.

$$g(3) = 0$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(0) = -8$$

2. Resuelve los siguientes ejercicios:

2.1. [2.0 puntos] Considera la función cuadrática en su forma general:

$$Q(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Primero, encuentra la función lineal $L_h(x)$ que pasa por $A = (1, Q(1))$ y $B = (1+h, Q(1+h))$, donde h es un parámetro. Luego, ¿cuál será la función $L_h(x)$ cuando $h = 0$?

$$A = (1; 5) \quad ; \quad B = (1+h; (1+h)^2 + 3(1+h) + 1)$$

Pendiente: $m = \frac{(1+h)^2 + 3(1+h) + 1 - 5}{1+h - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 + 3 + 3h - 4}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = h + 5$

$$L_h: y = (h+5)x + b$$

Usamos $A = (1; 5)$: $5 = (h+5)1 + b$
 $-h = b$

$$\hookrightarrow L_h: y = (h+5)x - h \quad \text{cuando } h=0 \rightarrow L_h: y = 5x$$

- 2.2. [2.0puntos] Encuentra la regla de correspondencia de la función cuadrática, cuya representación gráfica (es decir, la parábola) pase por $\left(m, \frac{9m}{4}\right)$ y tenga su vértice en el punto $\left(\frac{3m}{4}, \frac{7m}{4}\right)$.

Usamos: $y = a(x-h)^2 + k$ con $V = \left(\frac{3m}{4}, \frac{7m}{4}\right)$

$\hookrightarrow y = a\left(x - \frac{3m}{4}\right)^2 + \frac{7m}{4}$

Pasa por: $\left(m, \frac{9m}{4}\right) \rightarrow \frac{9m}{4} = a\left(m - \frac{3m}{4}\right)^2 + \frac{7m}{4}$

$\frac{2m}{4} = a\left(\frac{m}{4}\right)^2$

$\frac{8}{m} = a$

$\rightarrow y = \frac{8}{m}\left(x - \frac{3m}{4}\right)^2 + \frac{7m}{4}$

- 2.3. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 1:

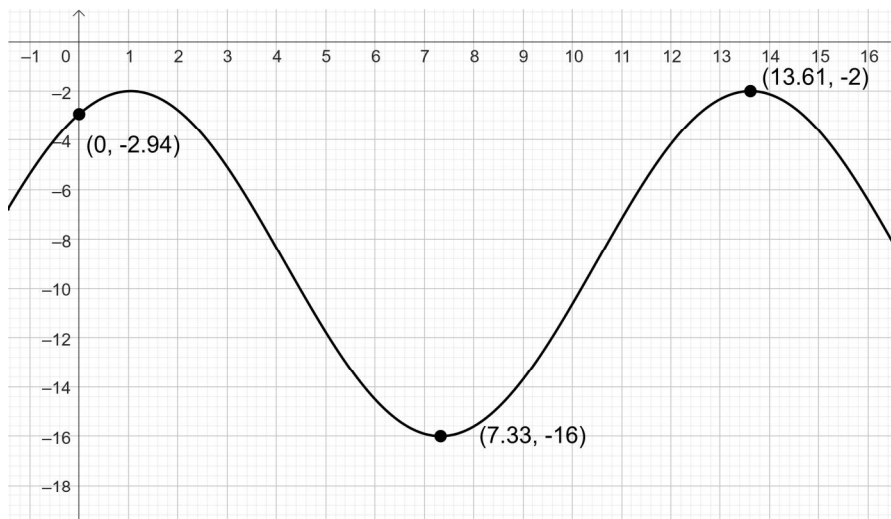


Figura 1: Gráfico de una función periódica del tipo $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función sinusoidal (seno o coseno) correspondiente.

$A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{-2 - (-16)}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$K = \frac{\max + \min}{2} = \frac{-2 + (-16)}{2} = \frac{-18}{2} = -9$

$\frac{T}{2} = 13.61 - 7.33 = 6.28 \rightarrow T = 12.56$

$\rightarrow B = \frac{2\pi}{12.56} = 0.5 = \frac{1}{2}$

función $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$

$h = 13.61 - \frac{T}{4} = 10.47$

$\hookrightarrow f(x) = 7\sin\left(\frac{1}{2}(x - 10.47)\right) - 9$

$f(x) = 7\sin\left(\frac{1}{2}x - 5.485\right) - 9$

2.4. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 2:

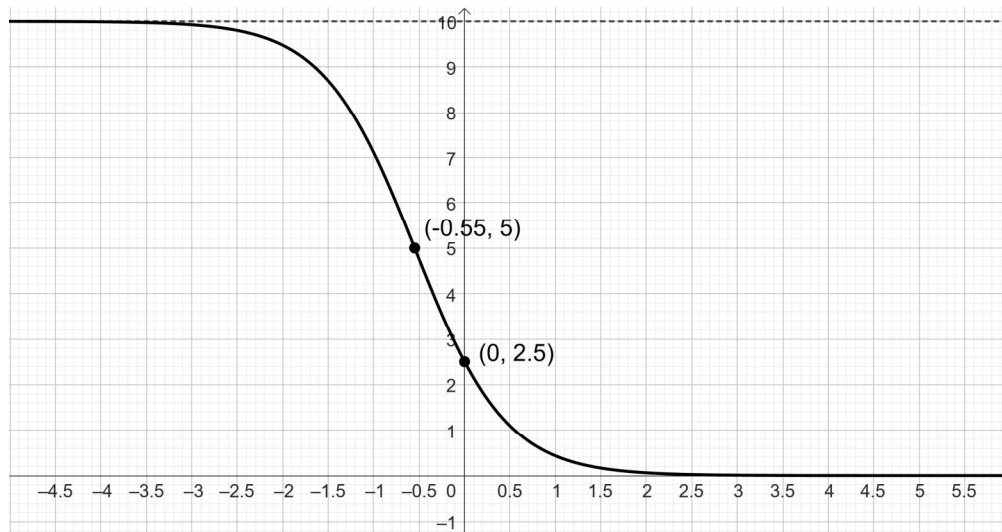


Figura 2: Gráfico de una función logística del tipo $f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-rx}}$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función logística correspondiente.

Del gráfico $A = 10$

Usando $(0; 2.5) \rightarrow 2.5 = \frac{10}{1 + Be^0}$

$B = 3$

Usando $(-0.55; 5) \rightarrow 5 = \frac{10}{1 + 3e^{0.55r}}$

$1 + 3e^{0.55r} = 2$

$3e^{0.55r} = 1$

$r = \frac{\ln(1/3)}{0.55} = -2$

$\hookrightarrow f(x) = \frac{10}{1 + 3e^{2x}}$

Parte 2

3. Un alumno de UTEC simula el comportamiento de la potencia eléctrica, medida en vatios W. Es conocida la expresión de la potencia eléctrica P disipada por un resistor en términos del voltaje, medido en voltios V, entre dos puntos separados y la resistencia, medida en ohmios Ω , que este dispositivo ejerce al paso de la corriente a través de él:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

En sus pruebas, el estudiante quiso comprender el comportamiento de la potencia eléctrica en el tiempo t , medido en segundos, cuando el voltaje V tiene la forma:

$$V(t) = 250 \sin(160t + 4)$$

Por otro lado, la resistencia R resulta tener dependencia lineal de la temperatura T , medida en $^{\circ}\text{C}$:

$$R(T) = -0.0035T + 0.25$$

Además, el estudiante le da una dependencia cuadrática a la temperatura en función del tiempo:

$$T(t) = -0.06t^2 + 20$$

3.1. [1.0puntos] Escribe la potencia P como función del tiempo t .

Sugerencia: Usa composición de funciones.

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(250 \sin(160t+4))^2}{-0.0035(-0.06t^2+20)+0.25} = \frac{250^2 \sin^2(160t+4)}{0.00021t^2 + 0.18}$$

$$\frac{62500 \sin^2(160t+4)}{0.00021t^2 + 0.18}$$

3.2. [2.0puntos] Extrae de la expresión anterior la función amplitud $A(t)$ de las oscilaciones de potencia.

Sugerencia: Usa la siguiente propiedad trigonométrica:

$$\cos(2x) = 1 - 2[\sin(x)]^2$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Con esto: $P(t) = \frac{250^2 \sin^2(160t+4)}{0.00021t^2 + 0.18} = \frac{62500}{0.00021t^2 + 0.18} \cdot \frac{1 - \cos(320t+8)}{2}$

$$\rightarrow P(t) = \frac{31250}{0.00021t^2 + 0.18} - \frac{31250}{0.00021t^2 + 0.18} \cos(320t+8)$$

$$A(t) = \frac{31250}{0.00021t^2 + 0.18}$$

3.3. [1.0puntos] Calcula la potencia en el dispositivo cuando la temperatura es de 18°C .

Cuando $T=18 \rightarrow 18 = -0.06t^2 + 20 \rightarrow 0.06t^2 = 2 \rightarrow t = 5.774$

Con esto: $P(5.774) = 257224.79 \Omega$

4. La cinética química se encarga de estudiar las velocidades o tasas a las que ocurren las reacciones químicas, por ejemplo $A \rightarrow B$. Experimentalmente se muestra que la tasa a la que ocurre una reacción r , en molar por segundo M/s es proporcional a la concentración de reactantes:

$$r = k[A]$$

donde $[A]$ es la concentración del reactante A, en molar M, y k es la constante de proporcionalidad. O sea, si aumenta la concentración de reactante A, la tasa de reacción r aumenta linealmente. Esto hace que podamos escribir:

$$[A]_t = [A]_0 e^{-kt} \quad (1)$$

donde $[A]_t$ es la concentración de A en cualquier tiempo t y $[A]_0$ es la concentración inicial, para $t = 0$.

En la Figura 3 mostramos el gráfico de la reacción de cierto gas A.

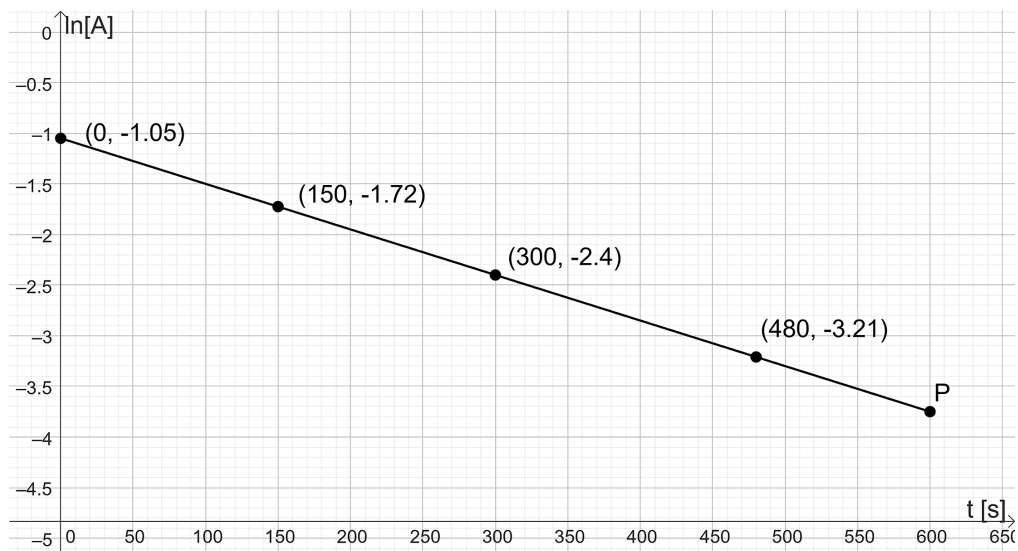


Figura 3: Gráfico de $\ln([A]_t)$ vs. t del gas A en la reacción que lo convierte en B.

4.1. [1.0 puntos] Obtén la función lineal

$$y(t) = mt + b$$

representada en la Figura 3, sabiendo que $y(t) = \ln([A]_t)$, donde la función $[A]_t$ está dada en (1).

Sugerencia: Recuerda las siguientes propiedades de logaritmos:

$$\log_a(X \cdot Y) = \log_a(X) + \log_a(Y)$$

$$\log_a(X^Y) = Y \log_a(X)$$

.

$$m = \frac{-1.72 - (-1.05)}{150 - 0} = \frac{-0.67}{15000} \quad ; \text{ ademas } b = -1.05$$

$$\therefore y = \frac{-0.67}{15000} t - 1.05$$

4.2. [1.0 puntos] Encuentra la concentración inicial $[A]_0$ de gas A.

$$\ln [A]_t = \frac{-67}{15000} t - 1.05$$
$$\hookrightarrow [A]_t = e^{-\frac{67}{15000} t} \cdot e^{-1.05} \rightarrow [A]_t = 0.35 e^{-\frac{67}{15000} t}$$
$$[A]_0 = 0.35$$

4.3. [1.0 puntos] Calcula el tiempo medio $t_{1/2}$, en el que la concentración inicial del gas A se reduce a la mitad.

$$\frac{0.35}{2} = 0.35 e^{-\frac{67}{15000} t} \rightarrow t = 155.18 \text{ s}$$

4.4. [1.0 puntos] Calcula la concentración de gas A a los 10 minutos de iniciada la reacción.

$$[A]_{600} = 0.35 \cdot e^{-\frac{67}{15000} (600)} = 0.024$$

Parte 3 - Bonus

5. [1.0 puntos] Sea la función cuadrática

$$f(x) = -5(x+2)^2 + 7$$

Halla el vértice de la función $g(x) = f(x-2) - 7$.

$$g(x) = f(x-2) - 7 = -5(x-2+2)^2 + 7 - 7 = -5x^2$$

$$V = (0; 0)$$

6. [1.0 puntos] Determina el rango de la siguiente función:

$$f(x) = -6\cos(4x-5) + 1$$

$$-1 \leq \cos(4x-5) \leq 1$$

$$6 \geq -6\cos(4x-5) \geq -6$$

$$7 \geq -6\cos(4x-5) + 1 \geq -5 \rightarrow \text{Ran } f = [-5; 7]$$

7. [1.0 puntos] Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$$

Realiza la gráfica de $-f(x)$ encima de la Figura 4.

Sugerencia: Apóyate de las líneas punteadas en la Figura 4.

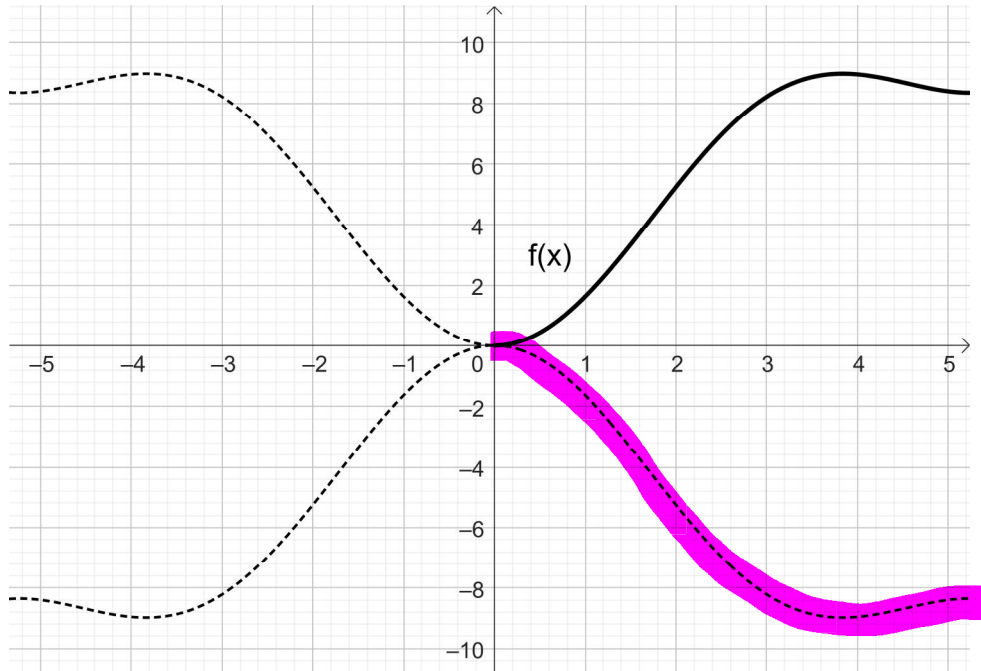


Figura 4: En negro, el gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$.