

Práctica Calificada 1 - Modelo 3

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:
Sección:

Nombres:

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 1:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!

Parte 1

1. Sean dos funciones:

$$f(x) = x - 7$$

$$g(x) = \sqrt{50 - 2x^2}$$

1.1. [1.0 puntos] Encuentra el dominio de $g(x-5)$.

$$\begin{aligned} 50 - 2x^2 &\geq 0 \\ 0 &\geq x^2 - 25 \\ 0 &\geq (x+5)(x-5) \\ \text{Dom } g(x) &[-5, 5] \end{aligned}$$

→ PARA $g(x-5)$
 $[-5+5, 5+5]$
 $\therefore \text{Dom } g(x-5)$
 $[0, 10]$

1.2. [1.5 puntos] Encuentra el dominio de la función $f(x)/g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{PARA } f(x)/g(x) \\ g(x) &\neq 0 \\ 50 - 2x^2 &\neq 0 \\ x &\neq 5, -5 \end{aligned}$$

DEL PROBLEMA ANTERIOR
 $\text{Dom } g(x) : [-5, 5]$
 $\therefore \text{Dom } f(x)/g(x) : [-5, 5]$

1.3. [1.5 puntos] Calcula $g \circ f(3)$.

$$\begin{aligned} \rightarrow f(3) &= 3 - 7 \\ f(3) &= -4 \\ \rightarrow g(-4) &= \sqrt{50 - 2(-4)^2} \\ g(-4) &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

→ $g \circ f(3) = 3\sqrt{2} \approx 4,24$

2. Resuelve los siguientes ejercicios:

2.1. [2.0 puntos] Considera la función cuadrática en su forma general:

$$Q(x) = x^2 + 8x + 2.$$

Primero, encuentra la función lineal $L_h(x)$ que pasa por $A = (1, Q(1))$ y $B = (1+h, Q(1+h))$, donde h es un parámetro. Luego, ¿cuál será la función $L_h(x)$ cuando $h = 0$?

$$\begin{aligned} Q(1) &= 11 \\ \rightarrow \text{PUNTO A } (1, 11) \\ Q(1+h) &= h^2 + 10h + 11 \\ \rightarrow \text{PUNTO B } (1+h, h^2 + 10h + 11) \\ \text{PENDIENTE} \\ m &= \frac{h^2 + 10h + 11 - 11}{1+h-1} = h+10 \end{aligned}$$

POR LO TANTO :
 $L_h(x) = (h+10)(x-1) + 11$
 $h=0$
 $L_h(x) = 10x + 1$

- 2.2. [2.0puntos] Encuentra la regla de correspondencia de la función cuadrática, cuya representación gráfica (es decir, la parábola) pase por $\left(m, \frac{8m}{3}\right)$ y tenga su vértice en el punto $\left(\frac{m}{3}, \frac{4m}{3}\right)$.

$$f(x) = a \left(x - \frac{m}{3}\right)^2 + \frac{4m}{3}$$

$\Rightarrow$ PASA por $\left(m, \frac{8m}{3}\right)$
 $\frac{8m}{3} = a \left(m - \frac{m}{3}\right)^2 + \frac{4m}{3}$
 $\frac{8m}{3} = a \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + \frac{4m}{3}$
 $\frac{4m}{3} = a \left(\frac{2m}{3}\right)^2$

$\frac{3}{m} = a$
 Por lo TANTO:
 $f(x) = \frac{3}{m} \left(x - \frac{m}{3}\right)^2 + \frac{4m}{3}$

- 2.3. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 1:

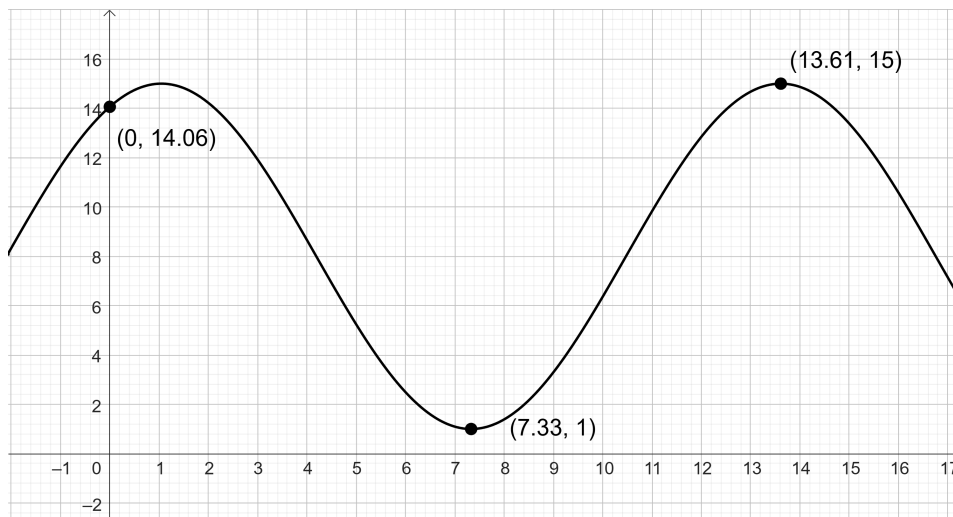


Figura 1: Gráfico de una función periódica del tipo $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función sinusoidal (seno o coseno) correspondiente.

$$A = \frac{15 - 1}{2} = 7$$

$$D = \frac{15 + 1}{2} = 8$$

$$\frac{T}{2} = 13.61 - 7.33$$

$$T = 12.56$$

$$B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12.56} = \frac{\pi}{6.28}$$

$$f(x) = 7 \sin\left(\frac{\pi}{6.28}x + C\right) + 8$$

$x = 0$
 $14.06 = 7 \sin(C) + 8$
 $\frac{6.06}{7} = \sin(C)$
 $\frac{\pi}{3} \approx C$

FINALMENTE:
 $f(x) = 7 \sin\left(\frac{\pi}{6.28}x + \frac{\pi}{3}\right) + 8$

Calculator screen 1: $7\sin\left(\frac{\pi \times 0}{6.28} + \frac{\pi}{3}\right) + 8 = 14.06217783$

Calculator screen 2: $7\sin\left(\frac{\pi \times 7.33}{6.28} + \frac{\pi}{3}\right) = 1.000009732$

Calculator screen 3: $7\sin\left(\frac{\pi \times 13.61}{6.28} + \frac{\pi}{3}\right) = 14.99999027$

2.4. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 2:

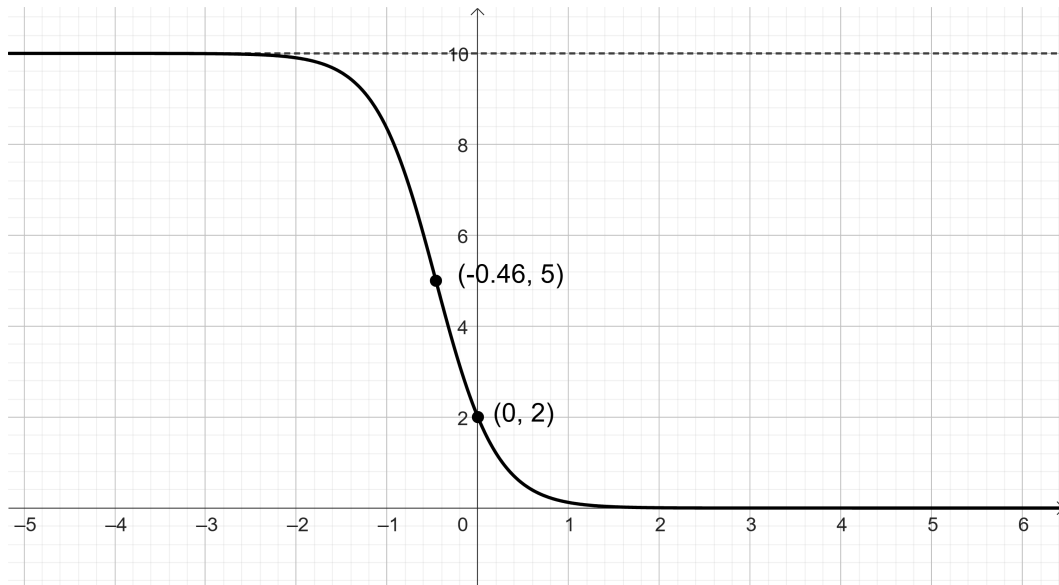


Figura 2: Gráfico de una función logística del tipo $f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-rx}}$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función logística correspondiente.

DEL GRÁFICO: $x \rightarrow -\infty$

$$10 = \frac{A}{1+0} \Rightarrow A=10$$

Encontramos (0, 2)

$$2 = \frac{10}{1+B} \Rightarrow B=4$$

Encontramos: (-0.46, 5)

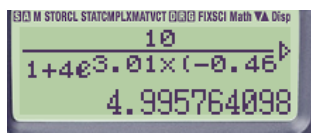
$$5 = \frac{10}{1+4e^{-r(-0.46)}}$$

$$e^{0.46r} = \frac{5}{20}$$

$$r = \ln(5/20) / 0.46$$

$$r = -3.01$$

★ $f(x) = \frac{10}{1+4e^{3.01x}}$



Parte 2

3. Un alumno de UTEC simula el comportamiento de la potencia eléctrica, medida en vatios W. Es conocida la expresión de la potencia eléctrica P disipada por un resistor en términos del voltaje, medido en voltios V, entre dos puntos separados y la resistencia, medida en ohmios Ω , que este dispositivo ejerce al paso de la corriente a través de él:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

En sus pruebas, el estudiante quiso comprender el comportamiento de la potencia eléctrica en el tiempo t , medido en segundos, cuando el voltaje V tiene la forma:

$$V(t) = 190 \sin(160t + 2)$$

Por otro lado, la resistencia R resulta tener dependencia lineal de la temperatura T , medida en $^{\circ}\text{C}$:

$$R(T) = -0.0045T + 0.25$$

Además, el estudiante le da una dependencia cuadrática a la temperatura en función del tiempo:

$$T(t) = 0.06t^2 + 20$$

3.1. [1.0puntos] Escribe la potencia P como función del tiempo t .

Sugerencia: Usa composición de funciones.

$$P = \frac{V(t)^2}{R(T)} = \frac{V(t)^2}{R(T(t))} = \frac{(190 \text{ Sen}(160t+2))^2}{-0.0045(0.06t^2+20)+0.25}$$

$$\star P(t) = \frac{190^2 \text{ Sen}(160t+2)^2}{-0.00027t^2 + 0.16}$$

3.2. [2.0puntos] Extrae de la expresión anterior la función amplitud $A(t)$ de las oscilaciones de potencia.

Sugerencia: Usa la siguiente propiedad trigonométrica:

$$\cos(2x) = 1 - 2[\sin(x)]^2$$

DE LA CONDICIÓN: $\frac{1 - \cos(2x)}{2} = \text{Sen}^2(x)$

$$P(t) = \frac{190^2 \left(\frac{1 - \cos(320t+4)}{2} \right)}{-0.00027t^2 + 0.16}$$

$$P(t) = \frac{18050 - 18050 \cos(320t+4)}{-0.00027t^2 + 0.16}$$

$$P(t) = \frac{-18050 \cos(320t+4)}{-0.00027t^2 + 0.16} + \frac{18050}{-0.00027t^2 + 0.16}$$

FORMA: $A(t) \cos(320t+4) + D(t)$

POR LO TANTO:

$$\star A(t) = \frac{-18050}{-0.00027t^2 + 0.16}$$

3.3. [1.0puntos] Calcula la potencia en el dispositivo cuando la temperatura es de 22 °C.

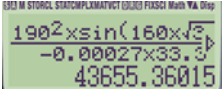
$$22 = 0.06t^2 + 20$$

$$2 = 0.06t^2$$

$$33.3 = t^2$$

$$t = \sqrt{33.3}$$

$$P(\sqrt{33.3}) = \frac{190^2 \text{ Sen}(160\sqrt{33.3}+2)^2}{-0.00027(33.3)+0.16}$$

$$\star P(\sqrt{33.3}) = 43655.36 \text{ V}$$


4. La cinética química se encarga de estudiar las velocidades o tasas a las que ocurren las reacciones químicas, por ejemplo $A \rightarrow B$. Experimentalmente se muestra que la tasa a la que ocurre una reacción r , en molar por segundo M/s es proporcional a la concentración de reactivos:

$$r = k[A]$$

donde $[A]$ es la concentración del reactante A, en molar M, y k es la constante de proporcionalidad. O sea, si aumenta la concentración de reactante A, la tasa de reacción r aumenta linealmente. Esto hace que podamos escribir:

$$[A]_t = [A]_0 e^{-kt} \quad (1)$$

donde $[A]_t$ es la concentración de A en cualquier tiempo t y $[A]_0$ es la concentración inicial, para $t = 0$.

En la Figura 3 mostramos el gráfico de la reacción de cierto gas A.

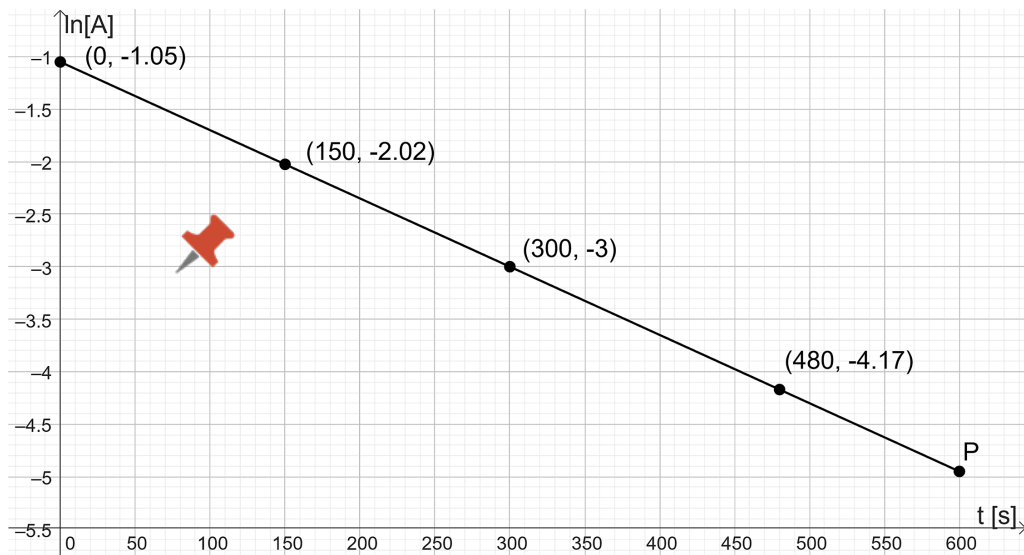


Figura 3: Gráfico de $\ln([A]_t)$ vs. t del gas A en la reacción que lo convierte en B.

4.1. [1.0 puntos] Obtén la función lineal

$$y(t) = mt + b$$

representada en la Figura 3, sabiendo que $y(t) = \ln([A]_t)$, donde la función $[A]_t$ está dada en (1).

Sugerencia: Recuerda las siguientes propiedades de logaritmos:

$$\log_a(X \cdot Y) = \log_a(X) + \log_a(Y)$$

$$\log_a(X^Y) = Y \log_a(X)$$

.

$$\begin{aligned} \ln([A]_t) &= \ln([A]_0 e^{-kt}) \\ \ln([A]_t) &= \ln([A]_0) + \ln[e^{-kt}] \\ \ln([A]_t) &= \ln([A]_0) - kt \\ \text{Forma: } y(t) &= mx + b \\ \star y(t) &= -kt + \ln([A]_0) \end{aligned}$$

- 4.2. [1.0 puntos] Encuentra la concentración inicial $[A]_0$ de gas A.

PARA EL PUNTO (0, -1.05) $-1.05 = -k(0) + \ln[A]_0$ $e^{-1.05} = [A]_0$	★ $[A]_0 \approx 0.35M$ ADENÁS PARA (480, -4.17) $-4.17 = -k(480) + \ln[0.35]$ ★ $k = 6.5 \times 10^{-3}$
--	--

- 4.3. [1.0 puntos] Calcula el tiempo medio $t_{1/2}$, en el que la concentración inicial del gas A se reduce a la mitad.

$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 e^{-6.5 \times 10^{-3} t_{1/2}}$ $-\ln(1/2) = t_{1/2} \cdot 6.5 \times 10^{-3}$ ★ $106.64 \approx t_{1/2}$	
---	--

- 4.4. [1.0 puntos] Calcula la concentración de gas A a los 10 minutos de iniciada la reacción.

10 min = 600s $[A] = 0.35 e^{-6.5 \times 10^{-3} \cdot 600}$ ★ $[A] = 7.08 \times 10^{-3} M$	
---	--

Parte 3 - Bonus

5. [1.0 puntos] Sea la función cuadrática

$$f(x) = 5(x+2)^2 - 3$$

Halla el vértice de la función $g(x) = f(x-7) + 5$.

Vértice $f(x) \rightarrow (-2, -3)$ $f(x-7) + 5 \rightarrow (-2+7, -3+5)$ ★ Vértice $g(x) \mapsto (5, 2)$	
---	--

6. [1.0 puntos] Determina el rango de la siguiente función:

$$f(x) = -6\cos(2x-5) + 5$$

$-1 \leq \cos(2x-5) \leq 1$ $6 \geq -6\cos(2x-5) \geq -6$ $6+5 \geq \underbrace{-6\cos(2x-5)}_{f(x)} + 5 \geq -6+5$	$-1 \geq f(x) \geq -1$ ★ Dom $f(x) : [-1, 11]$
---	--

7. [1.0 puntos] Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$$

Realiza la gráfica de $f(-x)$ encima de la Figura 4.

Sugerencia: Apóyate de las líneas punteadas en la Figura 4.

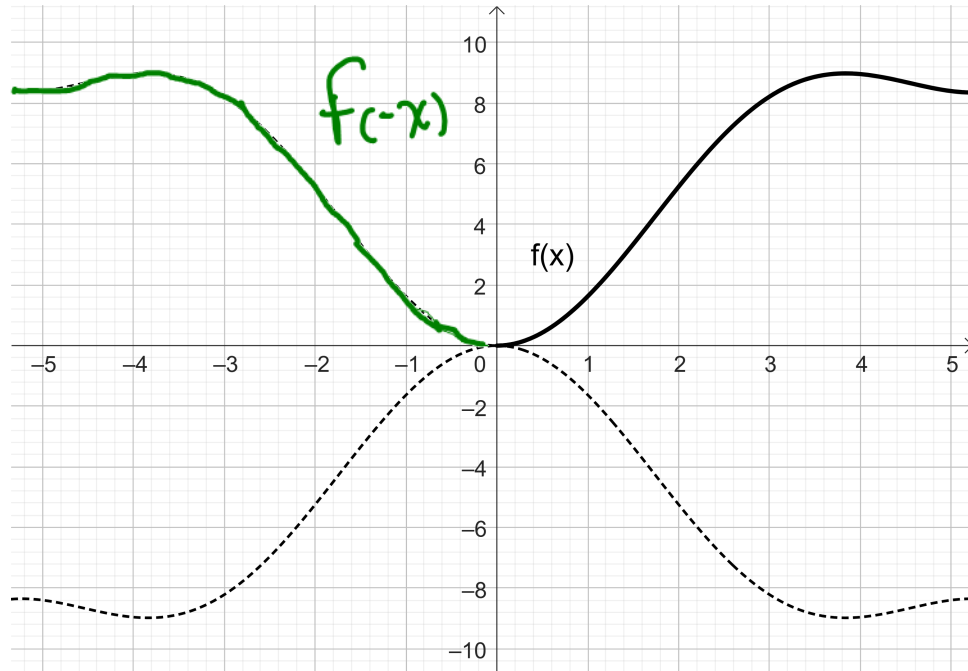


Figura 4: En negro, el gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$.