

Práctica Calificada 1 - Modelo 2

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:
Sección:

Nombres:

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 1:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!

Parte 1

1. Sean dos funciones:

$$f(x) = x - 4$$

$$g(x) = \sqrt{18 - 2x^2}$$

1.1. [1.0 puntos] Encuentra el dominio de $g(x-3)$.

$\begin{aligned} 18 - 2x^2 &\geq 0 \\ 0 &\geq x^2 - 9 \\ 0 &\geq (x+3)(x-3) \\ \text{Dom } g(x) &: [-3, 3] \end{aligned}$	PARA $g(x-3)$ ↑ TRASLADO A LA DERECHA ★ $\text{Dom } g(x-3): [0, 6]$
---	--

1.2. [1.5 puntos] Encuentra el dominio de la función $g(x)/f(x)$.

$\begin{aligned} 18 - 2x^2 &\geq 0 \\ 0 &\geq x^2 - 9 \\ 0 &\geq (x+3)(x-3) \\ \text{Dom } g(x) &: [-3, 3] \end{aligned}$	★ $\text{Dom } g(x)/f(x): [-3, 3]$
---	--

1.3. [1.5 puntos] Calcula $f \circ g(-2)$.

$\begin{aligned} g(-2) &= \sqrt{18 - 2(-2)^2} = \sqrt{10} \\ f(\sqrt{10}) &= \sqrt{10} - 4 \approx -0,84 \end{aligned}$	★ $f \circ g(-2) = -0,84$
---	---

2. Resuelve los siguientes ejercicios:

2.1. [2.0 puntos] Considera la función cuadrática en su forma general:

$$Q(x) = x^2 + 5x + 7.$$

Primero, encuentra la función lineal $L_h(x)$ que pasa por $A = (1, Q(1))$ y $B = (1+h, Q(1+h))$, donde h es un parámetro. Luego, ¿cuál será la función $L_h(x)$ cuando $h = 0$?

$\begin{aligned} Q(1) &= 1^2 + 5(1) + 7 = 13 \\ A &= (1, 13) \\ Q(1+h) &= (1+h)^2 + 5(1+h) + 7 \\ &= h^2 + 7h + 13 \\ B &= (1+h, h^2 + 7h + 13) \end{aligned}$	★ $L_h(x) = (h+7)(x-1) + 13$ $h=0$ ★ $L_h(x) = 7x + 6$
--	--

LA PENDIENTE:

$$m = \frac{h^2 + 7h + 13 - 13}{1+h-1} = \frac{h(h+7)}{h}$$

- 2.2. [2.0puntos] Encuentra la regla de correspondencia de la función cuadrática, cuya representación gráfica (es decir, la parábola) pase por $(m, 3m)$ y tenga su vértice en el punto $(\frac{m}{2}, \frac{5m}{2})$.

$$f(x) = a \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{5m}{2}$$

Punto de paso $(m, 3m)$

$$3m = a \left(m - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{5m}{2}$$

$$-\frac{m}{2} = a \left(\frac{m^2}{4}\right)$$

$$a = \frac{2}{m}$$

Ecuación:

$$f(x) = \frac{2}{m} \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{5m}{2}$$

- 2.3. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 1:

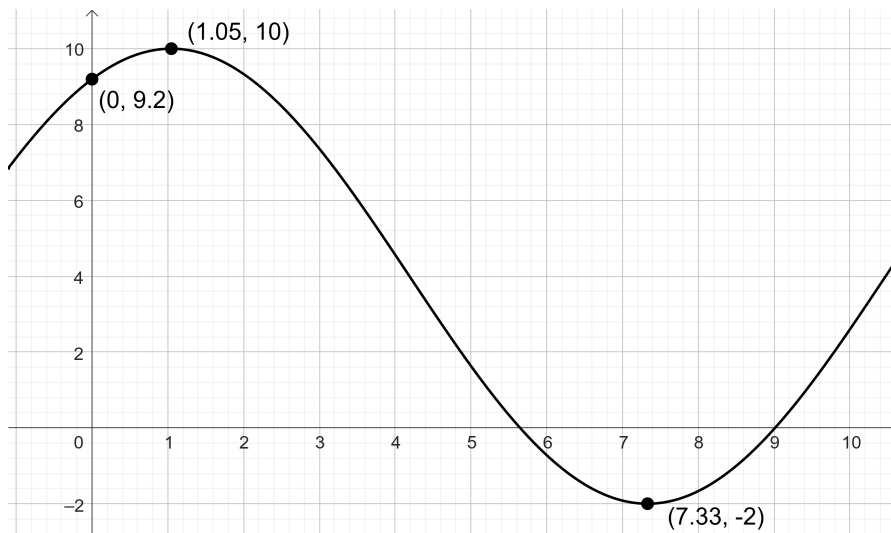


Figura 1: Gráfico de una función periódica del tipo $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función sinusoidal (seno o coseno) correspondiente.

$$A = \frac{10 - 9.2}{2} = 0.4$$

$$D = \frac{10 + 9.2}{2} = 9.6$$

$$7.33 - 1.05 = 6.28 \approx 2\pi$$

$$T = 12.56$$

$$B = \frac{2\pi}{12.56}$$

$$f(x) = 0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{12.56}x + C\right) + 9.6$$

$$9.2 = 0.4 \sin(C) + 9.6$$

$$C \approx \frac{\pi}{3}$$

Finalmente:

$$f(x) \approx 0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{12.56}x + \frac{\pi}{3}\right) + 9.6$$

Calculadora:

$$0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{12.56} \times 0 + \frac{\pi}{3}\right) + 9.6 = 9.196152423$$

$$0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{12.56} \times 1.05 + \frac{\pi}{3}\right) + 9.6 = 9.999991658$$

2.4. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 2:

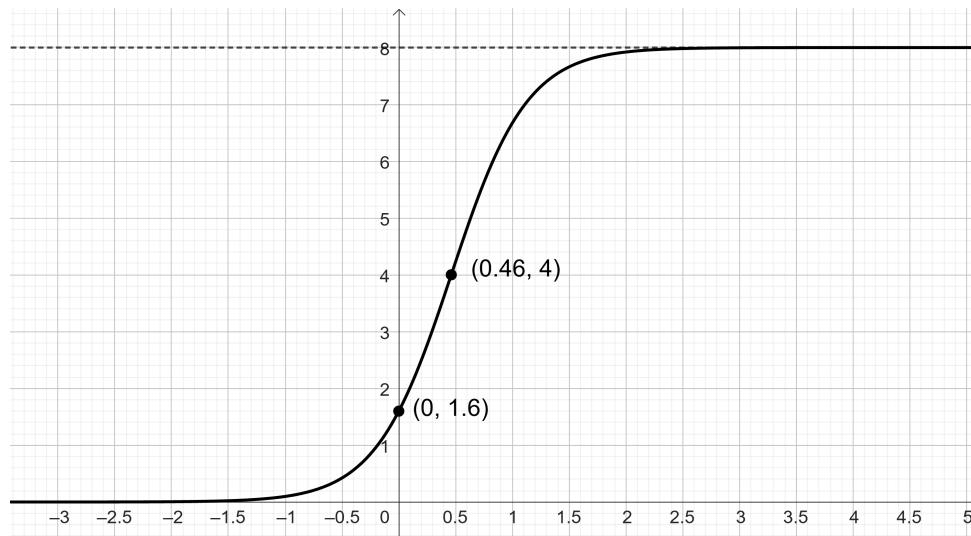


Figura 2: Gráfico de una función logística del tipo $f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-rx}}$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función logística correspondiente.

1. EL GRÁFICO: $x \rightarrow \infty$

$$8 = \frac{A}{1 + Be^{-rx}}$$

PODEMOS DESPRECIAR

$A=8$

PARA EL PUNTO: (0, 1.6)

$$f(0) = \frac{8}{1 + Be^0}$$

$$1.6 = \frac{8}{1 + B} \rightarrow \text{B=4}$$

TENEMOS:

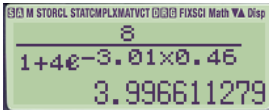
$$f(x) = \frac{8}{1 + 4e^{-rx}}$$

PARA EL PUNTO (0.46; 4)

$$4 = \frac{8}{1 + 4e^{-r(0.46)}}$$

$$r \approx 3.01$$

FINALMENTE: $f(x) = \frac{8}{1 + 4e^{-3.01x}}$



Parte 2

3. Un alumno de UTEC simula el comportamiento de la potencia eléctrica, medida en vatios W. Es conocida la expresión de la potencia eléctrica P disipada por un resistor en términos del voltaje, medido en voltios V, entre dos puntos separados y la resistencia, medida en ohmios Ω , que este dispositivo ejerce al paso de la corriente a través de él:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

En sus pruebas, el estudiante quiso comprender el comportamiento de la potencia eléctrica en el tiempo t , medido en segundos, cuando el voltaje V tiene la forma:

$$V(t) = 180 \sin(150t + 6)$$

Por otro lado, la resistencia R resulta tener dependencia lineal de la temperatura T , medida en $^{\circ}\text{C}$:

$$R(T) = -0.0075T + 0.65$$

Además, el estudiante le da una dependencia cuadrática a la temperatura en función del tiempo:

$$T(t) = -0.04t^2 + 20$$

3.1. [1.0puntos] Escribe la potencia P como función del tiempo t .

Sugerencia: Usa composición de funciones.

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(180 \sin(150t + 6))^2}{-0.0075 T(t) + 0.65}$$

$$P(t) = \frac{(180 \sin(150t + 6))^2}{-0.0075 (-0.04t^2 + 20) + 0.65}$$

$$P(t) = \frac{180^2 \sin^2(150t + 6)}{3 \times 10^{-4} t^2 + 0.5}$$

3.2. [2.0puntos] Extrae de la expresión anterior la función amplitud $A(t)$ de las oscilaciones de potencia.

Sugerencia: Usa la siguiente propiedad trigonométrica:

$$\cos(2x) = 1 - 2[\sin(x)]^2$$

DE LA CONDICIÓN: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$P(t) = \frac{180^2 \left(\frac{1 - \cos(300t + 12)}{2} \right)}{3 \times 10^{-4} t^2 + 0.5}$$

$$P(t) = \frac{-16200}{3 \times 10^{-4} t^2 + 0.5} \cos(300t + 12) + \frac{16200}{3 \times 10^{-4} t^2 + 0.5}$$

Forma: $A(t) \cos(Bt + C) + D(t)$

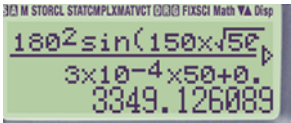
$$A(t) = \frac{-16200}{3 \times 10^{-4} t^2 + 0.5}$$

3.3. [1.0puntos] Calcula la potencia en el dispositivo cuando la temperatura es de 18°C .

Para $T = 18^\circ\text{C}$

$$18 = -0.04t^2 + 20$$

$$t = \sqrt{50}$$

$$P(\sqrt{50}) \approx 3349.13 \text{ W}$$


4. La cinética química se encarga de estudiar las velocidades o tasas a las que ocurren las reacciones químicas, por ejemplo $A \rightarrow B$. Experimentalmente se muestra que la tasa a la que ocurre una reacción r , en molar por segundo M/s es proporcional a la concentración de reactivos:

$$r = k[A]$$

donde $[A]$ es la concentración del reactante A, en molar M, y k es la constante de proporcionalidad. O sea, si aumenta la concentración de reactante A, la tasa de reacción r aumenta linealmente. Esto hace que podamos escribir:

$$[A]_t = [A]_0 e^{-kt} \quad (1)$$

donde $[A]_t$ es la concentración de A en cualquier tiempo t y $[A]_0$ es la concentración inicial, para $t = 0$.

En la Figura 3 mostramos el gráfico de la reacción de cierto gas A.

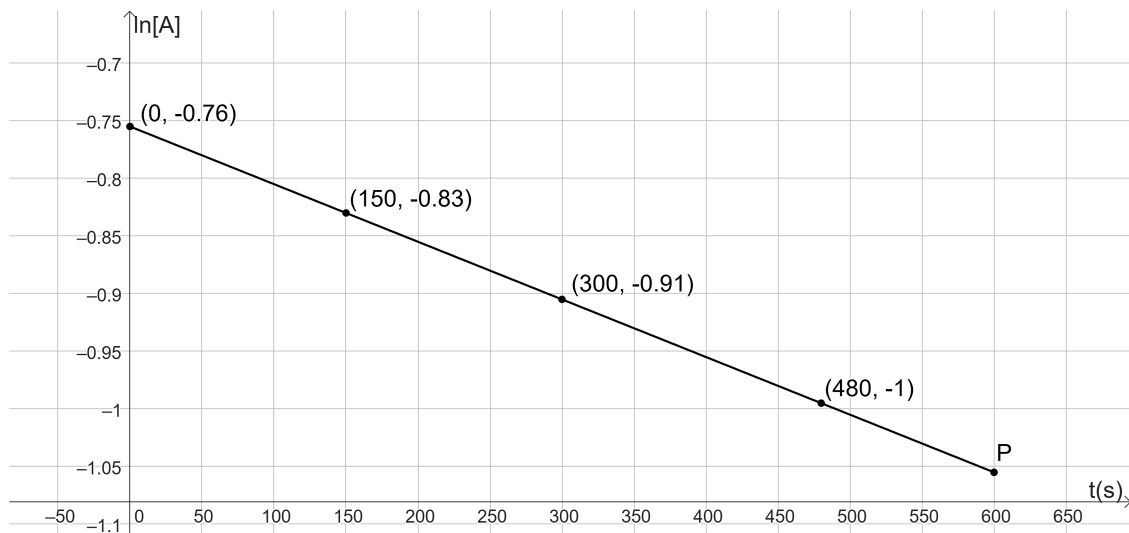


Figura 3: Gráfico de $\ln([A]_t)$ vs. t del gas A en la reacción que lo convierte en B.

4.1. [1.0 puntos] Obtén la función lineal

$$y(t) = mt + b$$

representada en la Figura 3, sabiendo que $y(t) = \ln([A]_t)$, donde la función $[A]_t$ está dada en (1).

Sugerencia: Recuerda las siguientes propiedades de logaritmos:

$$\log_a(X \cdot Y) = \log_a(X) + \log_a(Y)$$

$$\log_a(X^Y) = Y \log_a(X)$$

.

$$\begin{aligned} \ln [A]_t &= \ln ([A]_0 e^{-kt}) \\ \ln [A]_t &= \ln ([A]_0) + \ln (e^{-kt}) \\ \ln [A]_t &= -kt + \ln ([A]_0) \\ \star \quad y(t) &= -kt + \ln ([A]_0) \end{aligned}$$

- 4.2. [1.0 puntos] Encuentra la concentración inicial $[A]_0$ de gas A.

Para el punto $(0, -0.76)$
 $-0.76 = -k(0) + \ln [A]_0$
 $e^{-0.76} = [A]_0$
 $[A]_0 \approx 0.47 \text{ M}$

- 4.3. [1.0 puntos] Calcula el tiempo medio $t_{1/2}$, en el que la concentración inicial del gas A se reduce a la mitad.

$[A]_{t_{1/2}} = [A]_0 e^{-k t_{1/2}}$ $\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 e^{-k t_{1/2}}$ $\frac{\ln(1/2)}{-k} = t_{1/2}$ $1.358 \text{ s} = t_{1/2}$	Para hallar k $-1 = -k(480) + \ln [0.47]$ $k = 5.1 \times 10^{-4}$
--	---

- 4.4. [1.0 puntos] Calcula la concentración de gas A a los 10 minutos de iniciada la reacción.

10 min = 600 s
 $[A] = 0.47 e^{-5.1 \times 10^{-4} \times 600}$
 $[A] = 0.35 \text{ M}$

Parte 3 - Bonus

5. [1.0 puntos] Sea la función cuadrática

$$f(x) = 2(x-7)^2 + 3$$

Halla el vértice de la función $g(x) = f(x-7) + 4$.

Para $f(x) \rightarrow \sqrt{(7; 3)}$
 Para $g(x) = f(x-7) + 4 \rightarrow \sqrt{(7+7; 3+4)}$
 $\therefore \sqrt{(14; 7)}$

6. [1.0 puntos] Determina el rango de la siguiente función:

$$f(x) = 6 \cos(7x - 4) + 2$$

$-1 \leq \cos(7x-4) \leq 1$ $-6 \leq 6 \cos(7x-4) \leq 6$ $-4 \leq \underbrace{6 \cos(7x-4) + 2}_{f(x)} \leq 8$	$\text{Ran } f(x) : [-4; 8]$
---	------------------------------

7. [1.0 puntos] Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$$

Realiza la gráfica de $-f(-x)$ encima de la Figura 4.

Sugerencia: Apóyate de las líneas punteadas en la Figura 4.

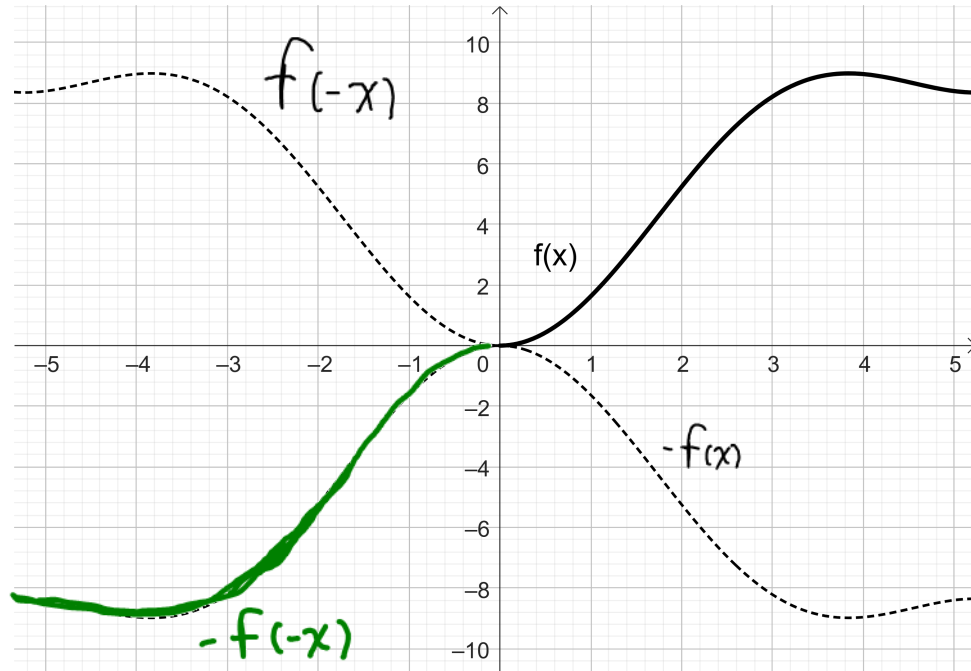


Figura 4: En negro, el gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$.