

Práctica Calificada 1 - Modelo 1

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:
Sección:

Nombres:

INDICACIONES GENERALES

Lee estas indicaciones antes de realizar la Práctica Calificada 1:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUES SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!

Parte 1

1. Sean dos funciones:

$$f(x) = x - 2$$

$$g(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$$

1.1. [1.0 puntos] Encuentra el dominio de $g(x-4)$.

DE LA RESTRICCIÓN: $\sqrt{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0$ $\Rightarrow 8 - 2x^2 \geq 0$ $0 \geq x^2 - 4$ $-2 \leq x \leq 2$ $\text{Dom } g(x): [-2; 2]$	Por lo tanto para $g(x-4)$ (suma +4) $\text{Dom } g(x-4): [-2; 6]$
--	--

1.2. [1.5 puntos] Encuentra el dominio de la función $g(x)/f(x)$.

DE LA CONDICIÓN $g(x)/f(x)$, $f(x) \neq 0$ $\Rightarrow x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ (I) DEL PROBLEMA ANTERIOR: $\text{Dom } g(x): [-2; 2]$ (II)	Por lo tanto de I y II $\text{Dom } g(x)/f(x): [-2; 2] - \{2\}$
--	--

1.3. [1.5 puntos] Calcula $g \circ f(-4)$.

Calculamos $f(-4) = -4 - 2$ $f(-4) = -6$ $-6 \notin \text{Dom } g(x)$	$g \circ f(-4) \nexists$ NO EXISTE
---	---

2. Resuelve los siguientes ejercicios:

2.1. [2.0 puntos] Considera la función cuadrática en su forma general:

$$Q(x) = x^2 + 3x + 4.$$

Primero, encuentra la función lineal $L_h(x)$ que pasa por $A = (1, Q(1))$ y $B = (1+h, Q(1+h))$, donde h es un parámetro. Luego, ¿cuál será la función $L_h(x)$ cuando $h = 0$?

Sustituimos $x=1$ en $Q(x)$: $Q(1) = 1^2 + 3(1) + 4 = 8$ Por lo tanto $A = (1; 8)$ Sustituimos $x=1+h$ en $Q(x)$: $Q(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h) + 4$ $= h^2 + 5h + 8$ Por lo tanto $B = (1+h; h^2 + 5h + 8)$	Calculamos pendiente $m = \frac{h^2 + 5h + 8 - 8}{1+h-1} = \frac{h(h+5)}{h} = h+5$ $\Rightarrow$ Calculamos la ecuación $y - 8 = (h+5)(x-1)$ $L_h(x) = (h+5)(x-1) + 8$ Para $h=0$ $L_h(x) = 5x + 3$
---	--

- 2.2. [2.0puntos] Encuentra la regla de correspondencia de la función cuadrática, cuya representación gráfica (es decir, la parábola) pase por $(m, 3m)$ y tenga su vértice en el punto $(\frac{4m}{3}, 7m)$.

Ecuación Canónica: $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Sea $(h; k) = (\frac{4m}{3}; 7m)$

$\Rightarrow f(x) = a(x - \frac{4m}{3})^2 + 7m$

Punto de paso: $(m; 3m)$

$$3m = a(m - \frac{4m}{3})^2 + 7m$$

$$-4m = a \frac{m^2}{9}$$

$$-\frac{36}{m} = a$$

Por lo tanto:

$$f(x) = -\frac{36}{m}(x - \frac{4m}{3})^2 + 7m$$

- 2.3. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 1:

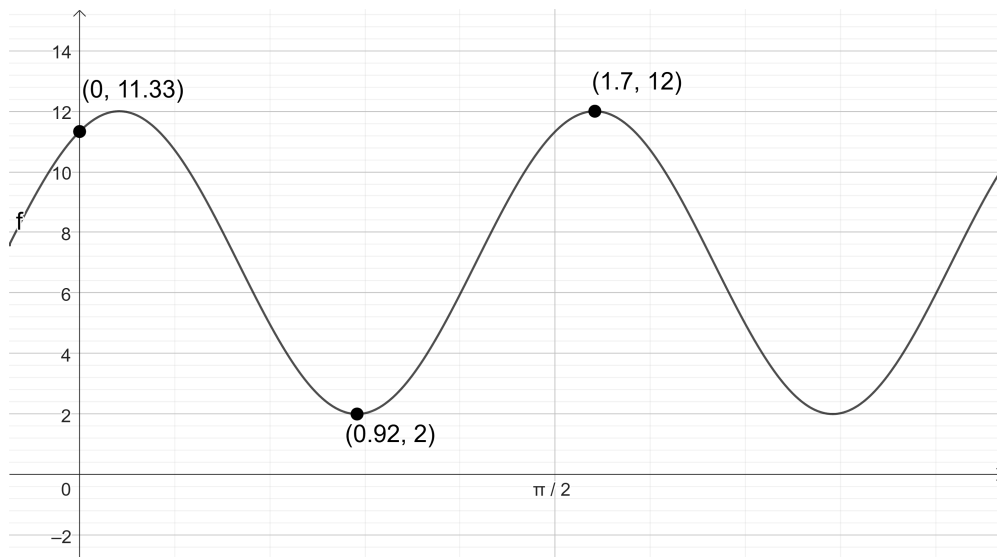


Figura 1: Gráfico de una función periódica del tipo $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función sinusoidal (seno o coseno) correspondiente.

$A = \frac{12-2}{2} = 5$

$D = \frac{12+2}{2} = 7$

$\frac{T}{2} = 1.7 - 0.92 = 0.78$

$T = 1.56$

$B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.56}$

Por lo tanto:

$f(x) = 5 \sin(\frac{2\pi}{1.56}(x - C)) + 7$

De la condición: $f(0) = 11.33$

$$11.33 = 5 \sin(\frac{2\pi}{1.56}(0 - C)) + 7$$

$$\frac{\pi}{3} \approx -\frac{2\pi}{1.56} C \Rightarrow C = -0.26$$

$f(x) = 5 \sin(\frac{2\pi}{1.56}(x + 0.26)) + 7$

Calculadora:

$5 \sin(\frac{2\pi \times (0 + 0.26)}{1.56}) = 11.33012702$

$5 \sin(\frac{2\pi \times (0.92 + 0.26)}{1.56}) = 2.004055009$

2.4. [2.0puntos] A partir del gráfico en la Figura 2:

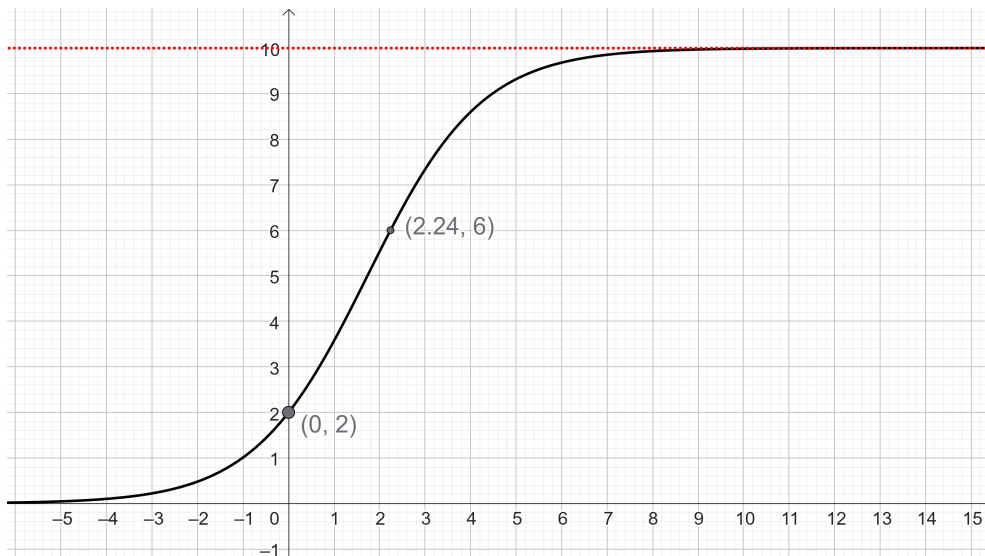


Figura 2: Gráfico de una función logística del tipo $f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-rx}}$.

Encuentra el valor de los parámetros y escribe la forma algebraica de la función logística correspondiente.

$f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-rx}}$ DE LA GRÁFICA $x \rightarrow \infty$ $10 = \frac{A}{1 + 0} \quad \boxed{A = 10}$ EVALUA (0, 2) $2 = \frac{A}{1 + B}$ $2 = \frac{10}{1 + B} \quad \boxed{B = 4}$	EVALUAMOS: (2.24; 6) $6 = \frac{10}{1 + 4e^{-r(2.24)}}$ $24e^{-r(2.24)} = 4$ $\boxed{r \approx 0.8}$ FINALMENTE: $\boxed{f(x) = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8x}}}$
--	---

Parte 2

3. Un alumno de UTEC simula el comportamiento de la potencia eléctrica, medida en vatios W. Es conocida la expresión de la potencia eléctrica P disipada por un resistor en términos del voltaje, medido en voltios V, entre dos puntos separados y la resistencia, medida en ohmios Ω , que este dispositivo ejerce al paso de la corriente a través de él:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

En sus pruebas, el estudiante quiso comprender el comportamiento de la potencia eléctrica en el tiempo t , medido en segundos, cuando el voltaje V tiene la forma:

$$V(t) = 150 \sin(200t + 5)$$

Por otro lado, la resistencia R resulta tener dependencia lineal de la temperatura T , medida en $^{\circ}\text{C}$:

$$R(T) = -0.0025T + 0.55$$

Además, el estudiante le da una dependencia cuadrática a la temperatura en función del tiempo:

$$T(t) = -0.02t^2 + 20$$

3.1. [1.0puntos] Escribe la potencia P como función del tiempo t .

Sugerencia: Usa composición de funciones.

De $R(t) = -0.0025 T(t) + 0.55$
 $= -0.0025 (-0.02t^2 + 20) + 0.55$
 $R(t) = 0.00005t^2 + 0.5$

Por lo tanto:
 $P(t) = \frac{V(t)^2}{R(t)}$

Por lo tanto:
 $P(t) = \frac{150^2 \sin^2(200t + 5)}{0.00005t^2 + 0.5}$

3.2. [2.0puntos] Extrae de la expresión anterior la función amplitud $A(t)$ de las oscilaciones de potencia.

Sugerencia: Usa la siguiente propiedad trigonométrica:

$$\cos(2x) = 1 - 2[\sin(x)]^2$$

De la sugerencia: $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x$

Por lo tanto:
 $P(t) = \frac{150^2 \left(\frac{1 - \cos(400t + 10)}{2} \right)}{0.00005t^2 + 0.5}$

Separando
 $P(t) = \frac{-11250 \cos(400t + 10)}{0.00005t^2 + 0.5} + \frac{11250}{0.00005t^2 + 0.5}$

Forma: $u(t) = A(t) \cos(Bt + C) + D(t)$

Por lo tanto:
 $A(t) = -\frac{11250}{0.00005t^2 + 0.5}$

3.3. [1.0puntos] Calcula la potencia en el dispositivo cuando la temperatura es de 18°C .

Calculamos t para $T = 18^\circ\text{C}$
 $18 = -0.02t^2 + 20$
 $t = 10$

Por lo tanto:
 $P(10) = \frac{150^2 \sin^2(200(10) + 5)}{0.00005(10)^2 + 0.5}$
 $P(10) \approx 7957.7 \text{ W}$

Calculadora: $150^2 \sin^2(2000 + 5) / (0.00005 \times 100 + 0.5) = 8561.996837$

4. La cinética química se encarga de estudiar las velocidades o tasas a las que ocurren las reacciones químicas, por ejemplo $A \rightarrow B$. Experimentalmente se muestra que la tasa a la que ocurre una reacción r , en molar por segundo M/s es proporcional a la concentración de reactivos:

$$r = k[A]$$

donde $[A]$ es la concentración del reactante A, en molar M, y k es la constante de proporcionalidad. O sea, si aumenta la concentración de reactante A, la tasa de reacción r aumenta linealmente. Esto hace que podamos escribir:

$$[A]_t = [A]_0 e^{-kt} \quad (1)$$

donde $[A]_t$ es la concentración de A en cualquier tiempo t y $[A]_0$ es la concentración inicial, para $t = 0$.

En la Figura 3 mostramos el gráfico de la reacción de cierto gas A.

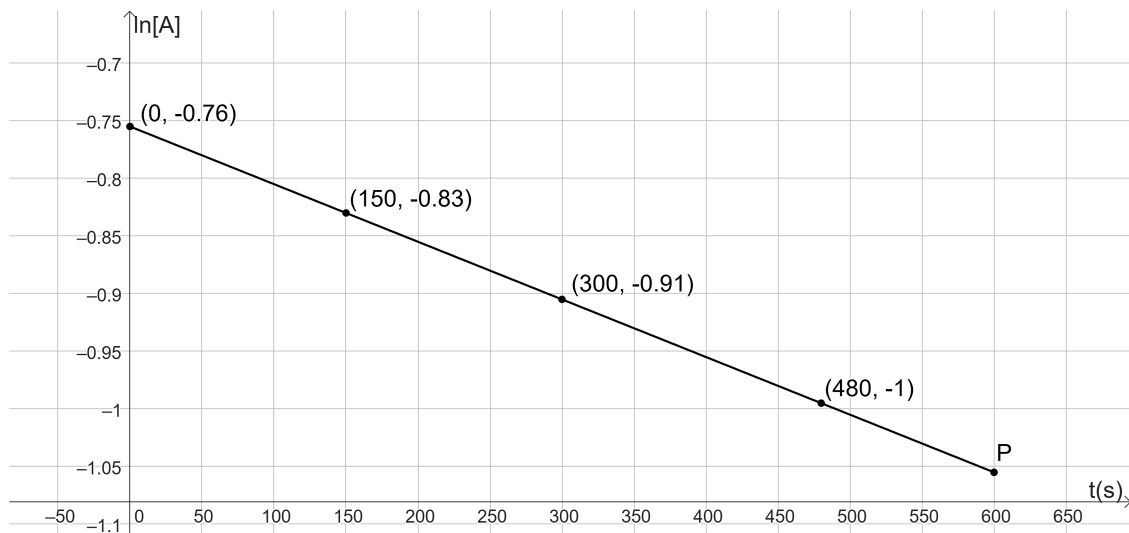


Figura 3: Gráfico de $\ln([A]_t)$ vs. t del gas A en la reacción que lo convierte en B.

4.1. [1.0 puntos] Obtén la función lineal

$$y(t) = mt + b$$

representada en la Figura 3, sabiendo que $y(t) = \ln([A]_t)$, donde la función $[A]_t$ está dada en (1).

Sugerencia: Recuerda las siguientes propiedades de logaritmos:

$$\log_a(X \cdot Y) = \log_a(X) + \log_a(Y)$$

$$\log_a(X^Y) = Y \log_a(X)$$

Q2

$$\ln([A]_t) = \ln([A]_0 e^{-kt})$$

$$\ln[A]_t = \ln[A]_0 + \ln(e^{-kt})$$

$$\ln[A]_t = \ln[A]_0 - kt$$

$$\ln[A]_t = \underbrace{-kt}_m + \underbrace{\ln[A]_0}_b$$

✂ $y(t) = -kt + \ln[A]_0$

- 4.2. [1.0 puntos] Encuentra la concentración inicial $[A]_0$ de gas A.

DE LA GRÁFICA $(0; -0.76)$ $-0.76 = \ln [A]_0 - k(0)$ $e^{-0.76} = e^{\ln [A]_0}$ ★ $0.468 M = [A]_0$	ADemás DEL PUNTO $(480, -1)$ $-1 = \ln [A]_0 - k(480)$ $k \approx 5.015 \times 10^{-4}$
---	---

- 4.3. [1.0 puntos] Calcula el tiempo medio $t_{1/2}$, en el que la concentración inicial del gas A se reduce a la mitad.

$[A]_t = [A]_0 e^{-kt}$ $\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 e^{-kt_{1/2}}$ $\frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}}$	$\frac{\ln(1/2)}{-k} = t_{1/2}$ ★ $1382.195 = t_{1/2}$
---	--

- 4.4. [1.0 puntos] Calcula la concentración de gas A a los 10 minutos de iniciada la reacción.

$t = 600s$ $[A]_t = 0.468 e^{-5.015 \times 10^{-4} \times 600}$ ★ $[A]_t \approx 0.35 M$
--

Parte 3 - Bonus

5. [1.0 puntos] Sea la función cuadrática

$$f(x) = -3(x-5)^2 + 4$$

Halla el vértice de la función $g(x) = f(x+7) - 8$.

EL VÉRTICE DE $f(x)$ $V(5; 4)$ $x+7 \rightarrow 5-7$ (DESPLAZO A LA IZQUIERDA) $y-8 \rightarrow 4-8$ (BAJA 8)	Por lo tanto VÉRTICE DE $g(x)$ ★ $V(-2; -4)$
---	---

6. [1.0 puntos] Determina el rango de la siguiente función:

$$f(x) = 5 \sin(8x - 4) + 2$$

DE LA CONDICIÓN $-1 \leq \sin x \leq 1$ $-1 \leq \sin(8x-4) \leq 1$ $-5 \leq 5 \sin(8x-4) \leq 5$ $-3 \leq 5 \sin(8x-4) + 2 \leq 7$	RANG $f(x)$ $[-3; 7]$
---	---

7. [1.0 puntos] Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$$

Realiza la gráfica de $-f(x)$ encima de la Figura 4.

Sugerencia: Apóyate de las líneas punteadas en la Figura 4.

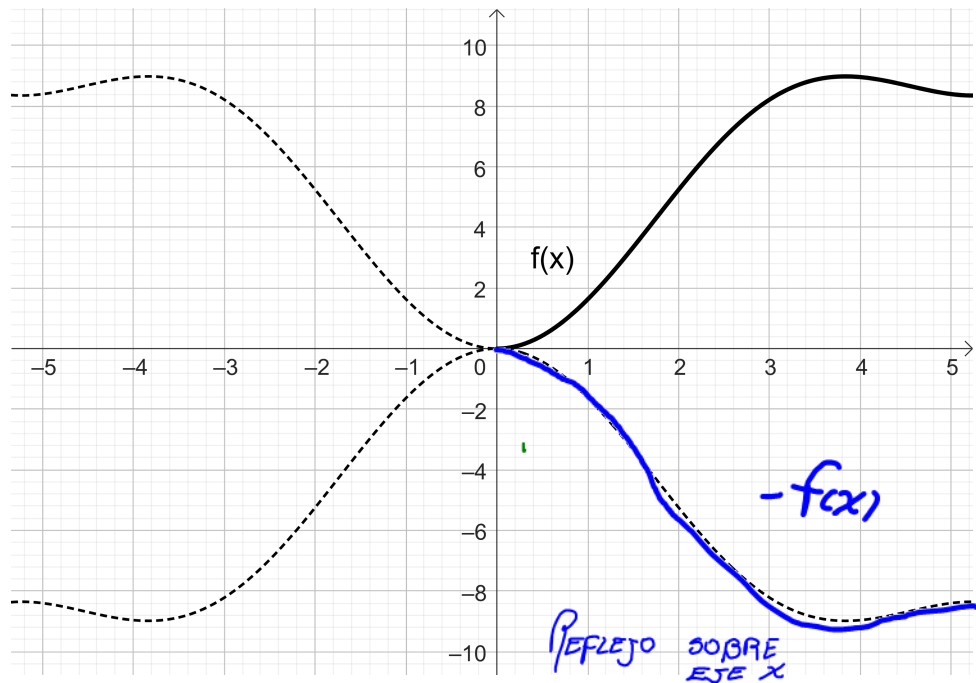


Figura 4: En negro, el gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3\cos(x) + 3$.