

Examen Parcial

Cálculo de una variable, 2024-2

Apellidos:

Nombres:

Sección:

INDICACIONES GENERALES

Lea estas indicaciones antes de realizar el Examen Parcial:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUE SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de su prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debe permanecer en silencio y proteger su trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.
- Los encargados de aula reportarán cualquier acto de deshonestidad a los docentes del curso, quienes anularán su prueba sin opción a reclamo.

■ **Sobre la evaluación**

- Se le sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Tenga a la mano su documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firme (o escriba su nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAME INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTA CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escriba sus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!

Parte 1

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x < 2 \\ 9 - x, & x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

responda los siguientes planteamientos:

1.1. **(1.5 puntos)** Analice la continuidad en $x = 2$ y realice la gráfica de la función. (Debe realizar el análisis verificando las condiciones para que una función sea continua)

- 1.2. **(1.5 puntos)** ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 2$? Argumente su respuesta calculando las derivadas laterales correspondientes y realice la gráfica de $f'(x)$

2. Dada la expresión

$$PV = nRT, \quad (2)$$

donde P , V y T son funciones definidas en función del tiempo, n y R son constantes. Determine:

2.1. **(1 punto)** $\frac{dV}{dt}$ suponiendo que T permanece constante.

2.2. **(1 punto)** $\frac{dV}{dt}$ suponiendo que P permanece constante.

3. (1.5 puntos) Determine el punto de la función

$$f(x) = \ln(x) \quad (3)$$

en el cual la recta tangente en dicho punto es paralela al segmento que une los puntos $(1; 0)$ y $(e; 1)$.

4. (1.5 puntos) La función

$$h(x) = ax^3 + bx^2 - cx \quad (4)$$

pasa por el punto $(1; 0)$, tiene un punto crítico en $x = -1/2$ y su segunda derivada intersecta al **eje Y** en $y = 6$. Determine los parámetros a , b y c .

5. Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2) e^{-0.5x} \quad (5)$$

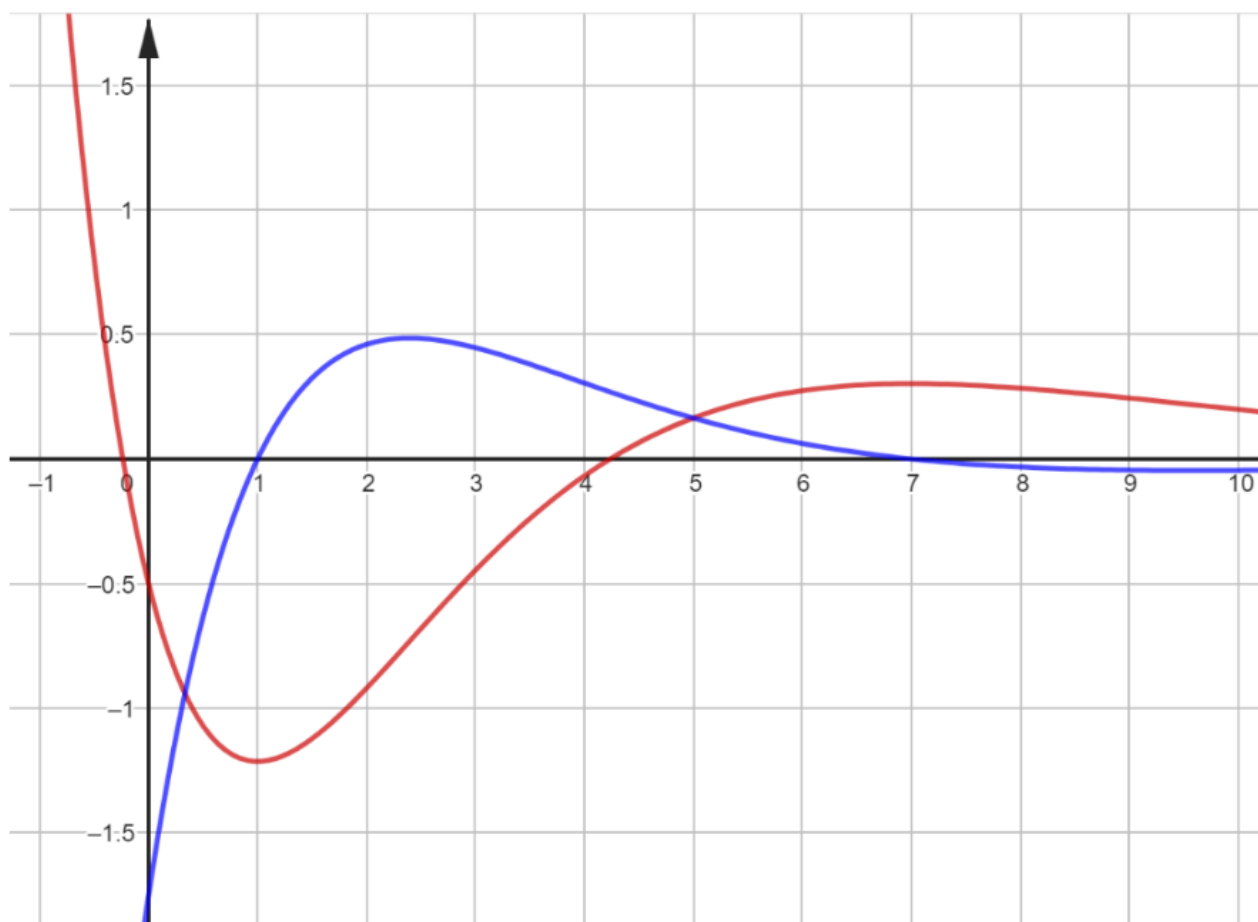
determine

5.1. **(1.5 puntos)** Los puntos máximos y mínimos.

5.2. **(1 punto)** Los puntos de inflexión.

5.3. (1.5 puntos) En la siguiente gráfica identifique f' , f'' y esboce la gráfica de la función $f(x)$.

Nota: Esboce sobre el mismo gráfico.

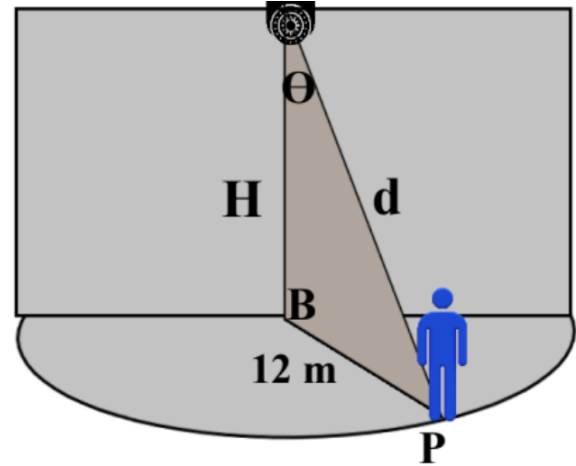


Parte 2

6. Se coloca un sensor de movimiento en una pared a una altura H del piso, para monitorear el paso de las personas. El sensor abarca una región semicircular sobre el suelo, de 12 m de radio. La sensibilidad S del sensor en cualquier punto P de la circunferencia, viene dada por la función

$$S = k \frac{\cos \theta}{d^2}, \quad (6)$$

donde k es una constante positiva, d es la distancia del sensor al punto P de la circunferencia y θ es el ángulo vertical de la distancia d con respecto a la pared, según se muestra en la figura.



- 6.1. (1 punto) Escriba la función S en términos de la altura H .

- 6.2. (3 puntos) ¿A qué altura se debe ubicar el sensor para que la sensibilidad sea máxima? Justifique su respuesta matemáticamente.



7. Suponga que el sensor del problema anterior se ubica a una altura de 2.8 m, y una persona ubicada en un punto P de la circunferencia, camina hacia el punto B , ubicado en el suelo, bajo el sensor, con una rapidez de 2 m/s.
- 7.1. **(3 puntos)** ¿Con qué rapidez cambia la sensibilidad del sensor cuando la persona está a 6 metros? ¿Aumenta o disminuye? **Nota:** Considere $k = 2 \text{ u} \cdot \text{m}^2$, donde u son las unidades de la sensibilidad.



7.2. (1 punto) ¿Qué ocurre con la sensibilidad del sensor cuando la persona está pasando justo sobre el punto B?

Parte 3: BONUS

1. **(1.0 puntos)** Halle el valor de x_0 que garantiza el Teorema del valor medio para la función

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 3, \quad (7)$$

entre $x = 1$ y $x = 3$.

2. **(1.0 puntos)** Determine $y' = \frac{dy}{dx}$ para

$$\cos(x^2 + 2y) + xe^y = 1 \quad (8)$$

3. **(1.0 puntos)** Un dron puede ser programado para seguir una trayectoria específica, en particular

$$x(t) = t^{\cos(t/2)}, \quad (9)$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Calcule la velocidad del dron en $t = 3$ segundos. ¿El dron está avanzando o retrocediendo?

Tablita auxiliar

- TVM: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y diferenciable en (a, b) , existe al menos un valor $x_0 \in [a, b]$ donde la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x)$ es igual a la pendiente de la secante entre $x = a$ y $x = b$.
- Para $y = f(x)$, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
- $\frac{d}{dx}[f(x)]^k = k[f(x)]^{k-1}f'(x)$.
- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$.
- $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.
- $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, donde $u = g(x)$.
- Para $f(x) = [a(x)]^{b(x)}$ se puede hacer $\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{d}{dx} (b(x) \cdot \ln(a(x)))$.