

Examen Parcial

Cálculo de una variable, 2024-2

Apellidos:

Nombres:

Sección:

INDICACIONES GENERALES

Lea estas indicaciones antes de realizar el Examen Parcial:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUE SU PRUEBA.**
- El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, **no está permitido usar graficadoras y/o que realicen derivadas o integrales.**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de su prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debe permanecer en silencio y proteger su trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.
- Los encargados de aula reportarán cualquier acto de deshonestidad a los docentes del curso, quienes anularán su prueba sin opción a reclamo.

■ **Sobre la evaluación**

- Se le sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Tenga a la mano su documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firme (o escriba su nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAME INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTA CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escriba sus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!

Parte 1

1. Resuelva los siguientes ejercicios:

1.1. **(1.5 puntos)** Halla el(los) valor(es) de x que el Teorema del valor medio garantiza para

$$g(t) = -3t^3 + 5t^2 + t + 1 \quad (1)$$

entre $t = -2$ y $t = 2$.

1.2. **(1.5 puntos)** Derive la función

$$f(x) = x^{\sin(2x)}, \quad (2)$$

usando reglas de derivación. **Sugerencia:** Aplique derivación logarítmica. (La derivación logarítmica la encuentra en la tablita al final del examen).

1.3. **(1.0 puntos)** Derivación implícita: Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si

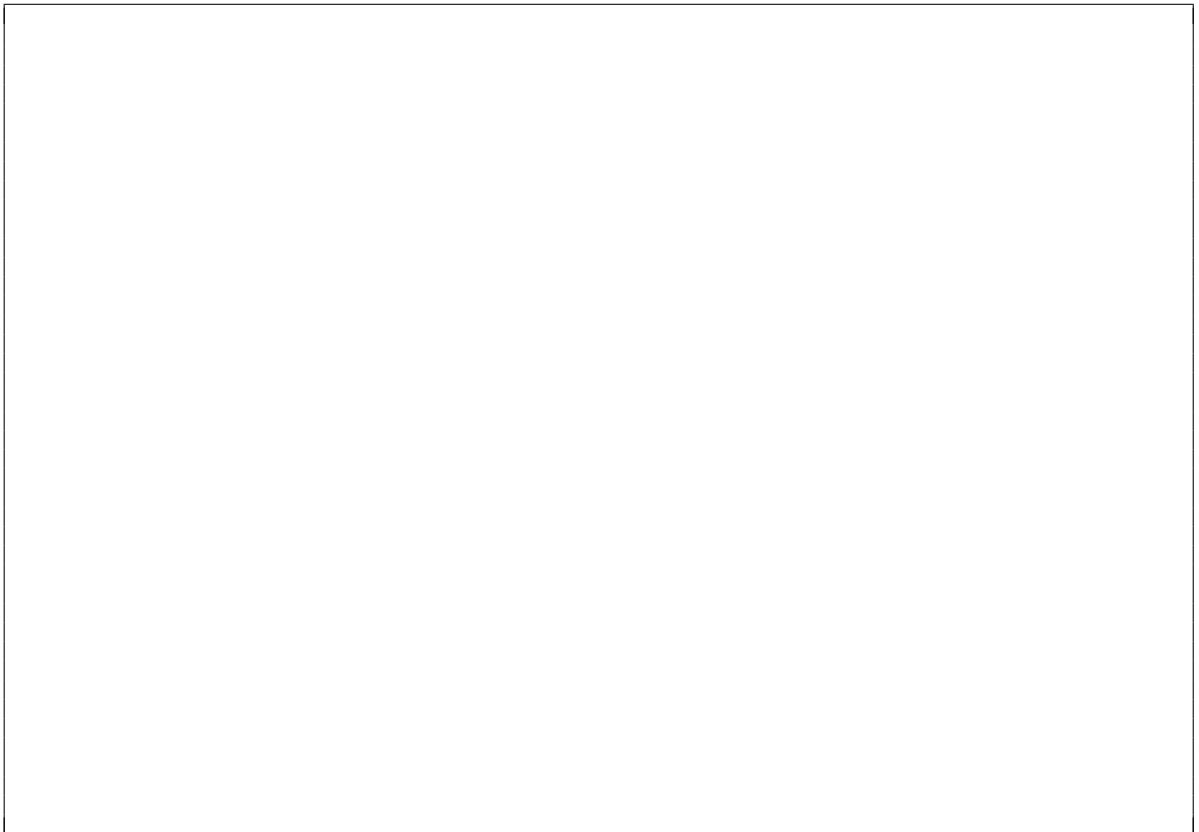
$$xe^x + \ln(xy) = 0 \quad (3)$$



2. Para la siguiente función:

$$g(t) = \begin{cases} -2t^2 + 6t + 8, & \text{si } 0 < t < 4, \\ 2t^2 - 6t - 8, & \text{si } t \geq 4. \end{cases} \quad (4)$$

2.1 **(1.5 puntos)** Analice la continuidad de la función dada en (4) en el punto donde $g(t) = 0$



2.2 (1.5 puntos) Calcule el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(4+h) - g(4)}{h} \quad (5)$$

donde la función $g(x)$ está dada en (4). **Sugerencia:** Analice primero lo que ocurre en $g(4)$.

2.3 (1.0 puntos) Determine $g'(3.9)$ y $g'(4.1)$, donde la función $g(t)$ está dada en (4).

3. Considere la siguiente función:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad x \in [-2, 2] \quad (6)$$

3.1 **(1.5 puntos)** Calcule los puntos críticos de la función en (6).

3.2 **(1.5 puntos)** Calcule los puntos inflexión de la función en (6). **Sugerencia:** La ecuación resultante de 4to grado puede ser desarrollada como una de 2do grado.

3.3 (1.0 puntos) En la Figura 1 se tiene las gráficas de $f'(x)$ y $f''(x)$. Identifique cada una de ellas y además grafique $f(x)$ encima. Justifique su elección.

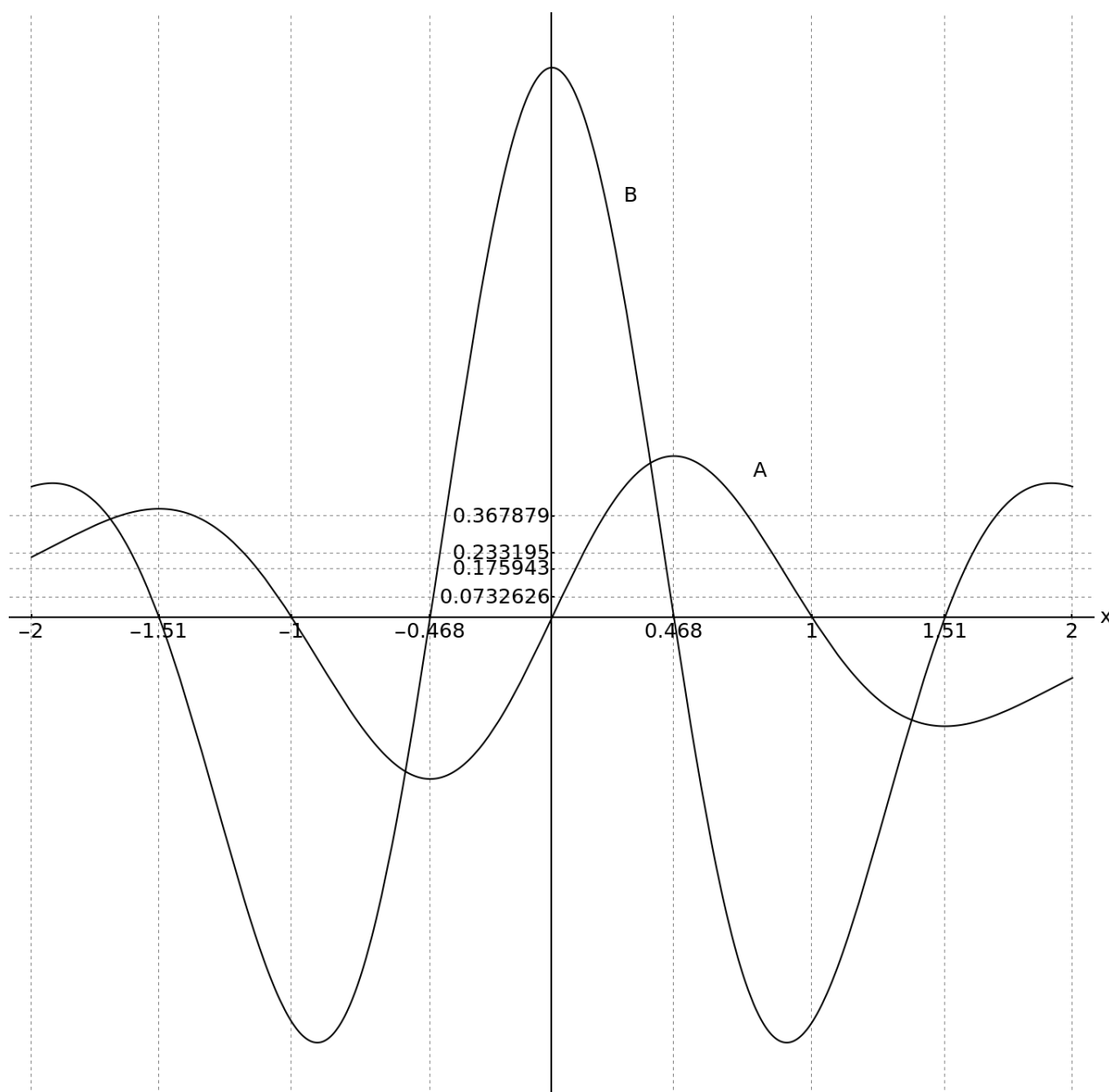


Figura 1: Gráficos A y B.

Parte 2

4. Un auto va por la carretera, del punto A al punto B (ver Figura 2). Con el objetivo de llegar en el menor tiempo posible, el auto abandona la carretera en el punto O, a una distancia x del punto C, y se dirige a B a través del campo. Si la velocidad del auto en carretera es de 20 m/s, y en el campo es de 16 m/s, luego:

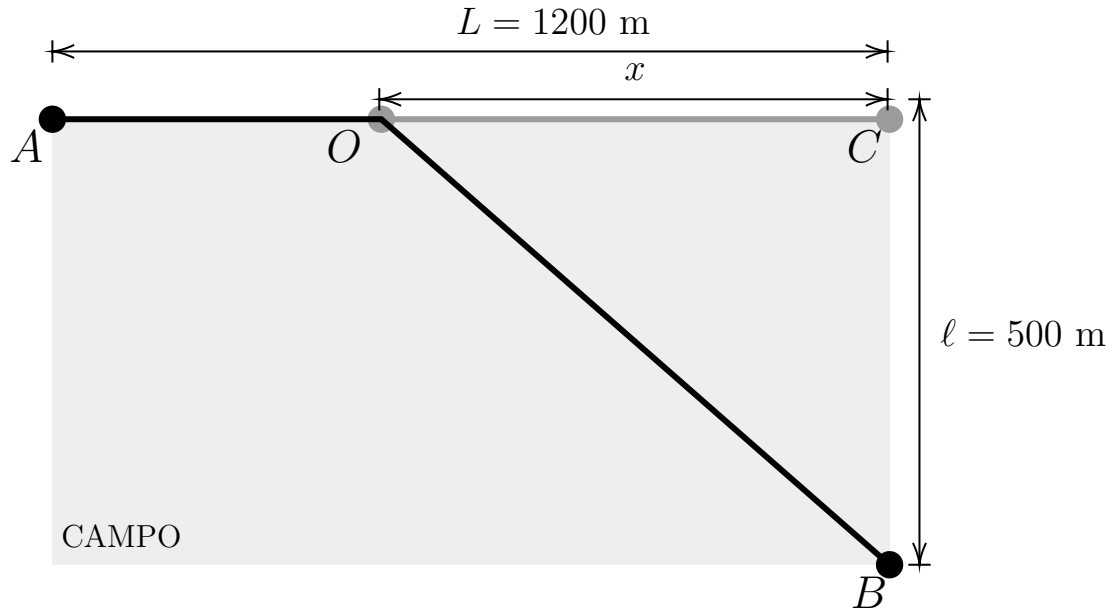


Figura 2: Esquema del recorrido del auto del punto A al punto B.

- 4.1. **(1.5 puntos)** Considerando la ecuación de la cinemática $d = vt$, donde, en general, d representa distancia, v la velocidad y t es el tiempo, escriba la función $t(x)$ que representa el tiempo que tarda el auto en ir desde A hacia B en términos de x .

- 4.2. **(1.5 puntos)** Calcule la tasa de cambio del tiempo de viaje de A a B con respecto a la distancia del punto O al punto C.

- 4.3. **(1.0 puntos)** Escriba la expresión que representa el menor tiempo de viaje posible.

5. Una cantidad de agua es succionada de un depósito de forma cónica a una tasa constante de 2500 litros por minuto ($1 \text{ L} = 0.001 \text{ m}^3$), el cual tiene $H = 20$ metros de altura sobre el suelo y $R = 5$ metros de radio, tal como se muestra en la Figura 3. Recuerde que $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

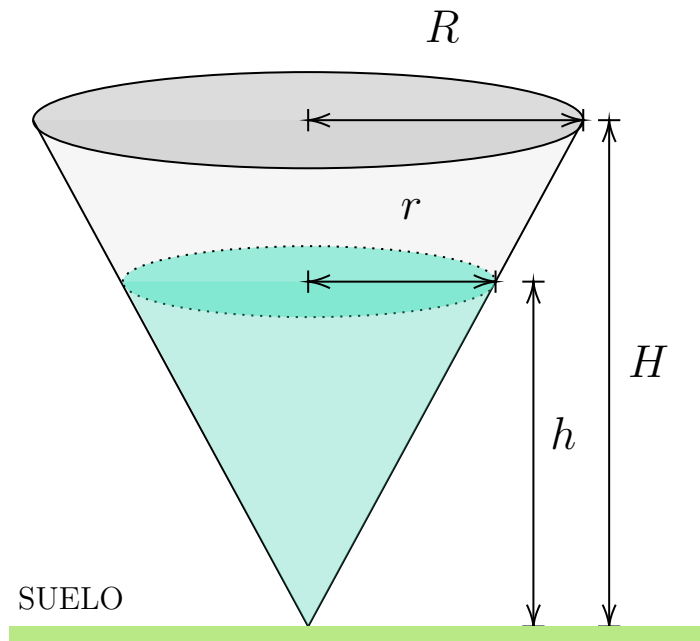


Figura 3: Esquema del recipiente cónico del que se está succionando agua a una tasa constante.

- 5.1. **(1.5 puntos)** Calcule la rapidez a la que cambia el radio r del volumen de agua cuando $r = 3$ metros. ¿El radio aumenta o disminuye en este instante?

- 5.2. **(1.5 puntos)** En el instante descrito en el ítem anterior, calcule la tasa de cambio de la altura del volumen de agua sobre el suelo. ¿Está aumentando o disminuyendo?

- 5.3. **(1.0 puntos)** Cuando el nivel de agua está a $h = 12$ metros del suelo, calcule el cambio de volumen cuando pasan 0.01 minutos.

Parte 3: BONUS

6. (1.0 puntos) Evalúe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} & 0 \leq x < 3, \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} & 3 \leq x. \end{cases} \quad (7)$$

7. (1.0 puntos) La posición de una partícula en el eje Y depende de su posición en el eje X, y se describe mediante la ecuación

$$y^2 - 1 = x, \quad (8)$$

donde x e y se miden en metros. Si ambas coordenadas varían en el tiempo (en segundos) y se sabe que

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 4, \quad (9)$$

determine la variación de la posición y con respecto al tiempo cuando $x = 8$ cm.

8. **(1.0 puntos)** Calcule la razón de cambio instantánea de la función

$$g(x) = x^{\ln(x)} \tag{10}$$

en $x = e^2$, donde e es el número de Euler. Además, calcule la recta tangente a la función en (10) en $x = e^2$.

Tablita auxiliar

- TVM: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y diferenciable en (a, b) , existe al menos un valor $x_0 \in [a, b]$ donde la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x)$ es igual a la pendiente de la secante entre $x = a$ y $x = b$.
- Para $y = f(x)$, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
- $\frac{d}{dx}[f(x)]^k = k[f(x)]^{k-1}f'(x)$.
- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$.
- $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.
- $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, donde $u = g(x)$.
- Para $f(x) = [a(x)]^{b(x)}$ se puede hacer $\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{d}{dx} (b(x) \cdot \ln(a(x)))$.