

Examen Parcial

Cálculo de una variable, 2024-1

Apellidos:

Nombres:

Sección:

INDICACIONES GENERALES

Lea estas indicaciones antes de realizar el Examen Parcial:

- La evaluación es **INDIVIDUAL**

- **Actos de deshonestidad:**

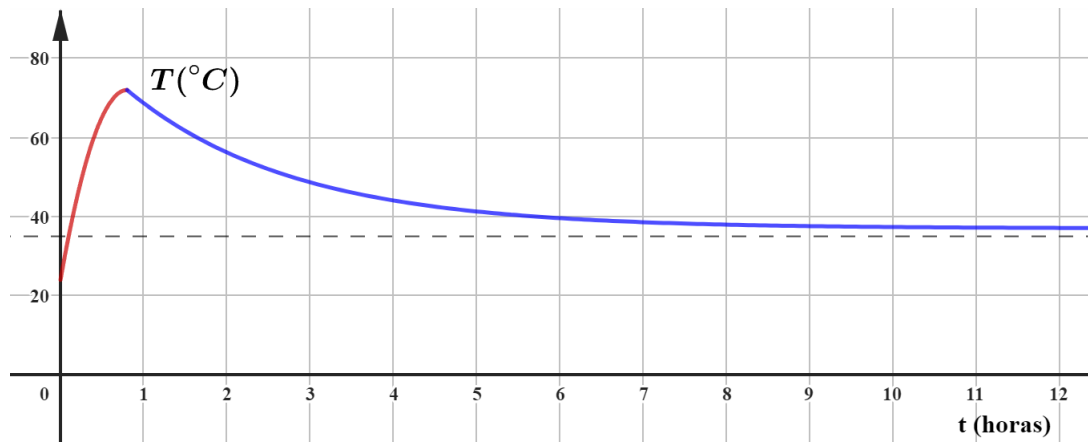
- (1) En caso se detecte que el estudiante esté cometiendo un acto de deshonestidad académica, ya sea copia, plagio, u otro; o es perpetrador, cómplice o tenga conocimiento y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable**.
- (2) El uso de calculadoras científicas es necesario para dar el examen. Sin embargo, las calculadoras **no pueden ser graficadoras o contener las funciones que calculen derivadas o integrales directamente**. Del mismo modo, se prohíbe revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen.
- (3) Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los profesores en el aula en todo momento. Debe permanecer en silencio y siempre proteger su trabajo ante intentos de copia.

- **Sobre la evaluación**

- Se le sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Tenga a la mano y/o adjunte su documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado en la primera hoja. Firme (o escriba su nombre, en caso de ser menor de edad) en **todas las páginas** de esta evaluación.
- La resolución del examen debe ser desarrollada en papel, escrita a mano y con lápiz, lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara, legible, o no se aprecia en forma nítida en Gradescope, **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN**.
- Este examen consta de dos (2) partes y se desarrolla por escrito en cada unas:
 - PRIMERA PARTE (14 puntos) Contiene ítems de interpretación y de cálculo.
 - SEGUNDA PARTE. (6 puntos) Contiene preguntas relacionadas a las **evaluaciones virtuales**.
- Los profesores solo responderán consultas 10 minutos después del comienzo de la evaluación y 20 minutos antes de su término.
- Escriba sus **soluciones únicamente en los cuadros**.

Parte 1

- (1) Para la elaboración de una variedad de yogurt a nivel industrial, se tiene una mezcla de insumos lácteos a 24 °C. Estos se calientan hasta alcanzar los 72 °C, y luego se deja enfriar la mezcla hasta 37 °C, temperatura en la cual se mantiene. Todo el proceso toma 12 horas.



El gráfico que se muestra indica la temperatura T de la mezcla en t horas, donde el máximo de la función cuadrática (primer tramo T_1) coincide con la temperatura más alta a los 48 minutos, y luego la mezcla se enfría según el modelo

$$T_2(t) = Ae^{-0.5t} + B. \quad (1)$$

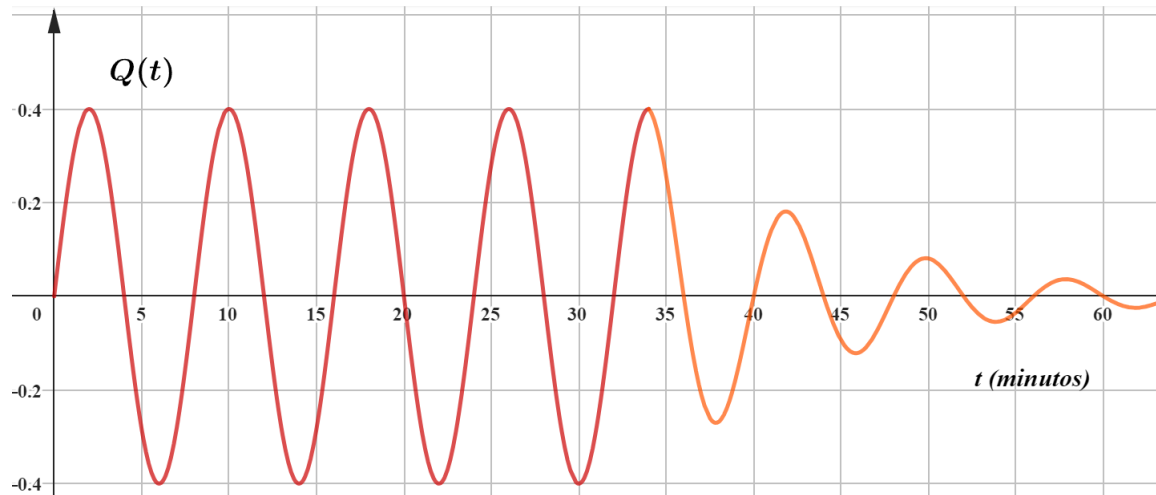
- (a) [2 puntos] Escriba la función $T(t)$ por tramos, con el dominio correspondiente. Identifique el punto máximo de la función.

- (b) [1 punto] ¿Con qué rapidez disminuye la temperatura justo en $t = 0.81$?

- (c) **[2 puntos]** Utilice la gráfica dada y la información obtenida en el ítem (b) para dibujar la gráfica de $T'(t) = \frac{dT}{dt}$. ¿Existe la derivada de T en $t = 0.8$? ¿ $\frac{dT}{dt}$ es continua en todo su dominio? Justifique su respuesta matemáticamente.
Sugerencia: Aplique conceptos de derivabilidad.

- (d) **[2 puntos]** ¿Qué cambios ocurren en la función T y la tasa de variación de temperatura si, a partir de la hora 12, el parámetro B es $37 - 1.5t$. Argumente su respuesta.

- (2) En una fábrica de helados, llenan un tanque cilíndrico, de 2.4 m de alto y 1.8 m de diámetro con una mezcla base líquida. La mezcla en el cilindro ingresa con un caudal variable, como parte del proceso de elaboración, según la función $Q(t) = A \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$ durante 34 minutos, siendo $Q(t)$ la tasa de variación del volumen $V(t)$. Luego de ese tiempo, la amplitud de la función sinusoidal del caudal es variable, según $A = 11.98e^{-0.1t}$, hasta llegar a los 60 minutos en total, para todo el proceso, como se muestra en la gráfica adjunta.



Nota: Tenga en cuenta las unidades de medida al momento de operar.

- (a) [1 puntos] ¿Cuál es la tasa de cambio del volumen del tanque a los 25 minutos?.

- (b) [2 puntos] ¿Con qué rapidez cambia el nivel h del líquido a los 25 minutos? Interprete el resultado.

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

- (c) **[2 puntos]** ¿En qué tiempos, durante la primera media hora del proceso, se alcanza el volumen máximo? Argumente su respuesta.

- (d) **[2 puntos]** ¿Con qué rapidez cambia el caudal a los 60 minutos? ¿Cuál es la tasa de cambio del nivel h en ese instante? Explique los resultados.

Parte 2

- (4) [3 puntos] En su Evaluación Virtual 1 realizó el modelado de una situación a partir de datos experimentales tabulados. Considere ahora el caso de un grupo de estudiantes de ingeniería, que están en el laboratorio, donde manipulan un resorte conectado a un sensor. Los datos detectados por este fueron tabulados de la siguiente manera:

t (s)	x (cm)	t (s)	x (cm)
0.00	8.44	3.53	1.70
0.79	8.71	3.93	4.21
1.18	6.06	5.76	4.32
1.57	4.24	4.71	7.80
1.96	2.13	5.11	9.55
2.75	-0.28	5.50	7.43

Cuadro 1: Datos recogidos del comportamiento de un resorte en el laboratorio de física de UTEC.

Ya que es un comportamiento oscilatorio, es posible modelarlo mediante una función sinusoidal (seno o coseno). Escriba, para este comportamiento, la función periódica que mejor se adecúe a los datos, especificando su amplitud A , su periodo T , fase ϕ y eje k .

- (5) **[3 puntos]** En su Evaluación Virtual 2, analizamos un problema de optimización en el contexto de un circuito RLC alimentado por una fuente AC. Considere ahora el caso de un RLC+AC, donde la impedancia medida en el pico de corriente es de $Z = 180$ ohmios, con una frecuencia de $\omega_0 = 350$ rad/s. Si la impedancia del inductor en el circuito es de $L = 2200$ mH y el capacitor tiene capacitancia C regulable, halle el valor de capacitancia que provocó la resonancia y el valor de resistencia del resistor en el circuito.

Fórmulas de Derivación

($u = g(x)$, a constante positiva)

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{d}{dx} u^r = r u^{r-1} \frac{du}{dx}$, r racional | 6. $\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{senu} \frac{du}{dx}$ |
| 2. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ | 7. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ |
| 3. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$ | 8. $\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$ |
| 4. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ | 9. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ |
| 5. $\frac{d}{dx} \operatorname{senu} = \cos u \frac{du}{dx}$ | 10. $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} u = -\operatorname{csc} u \cot u \frac{du}{dx}$ |