

Examen Final

Nombres y Apellidos:

Sección:

Parte I

1. (2.0pts) Sea la función

$$R(x) = \int_{-3}^{x^4} \frac{1}{1 + 9 \sin^2(t)} dt \quad (1)$$

determine $R'(x)$

Solución:

$$R'(x) = \frac{1}{1 + 9 \sin^2(x^4)} \cdot (x^4)' = \frac{4x^3}{1 + 9 \sin^2(x^4)}$$

2. (2.0pts) Resuelva la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2 \ln(\ln x)}{x} dx \quad (2)$$

Solución: M. Substitución: $\ln x = u$
 $\frac{1}{x} dx = du$

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \ln(\ln x)}{x} dx &= \int 2 \ln(u) du = 2(u \ln u - u) + C \\ &= 2(\ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x) + C \end{aligned}$$

3. (3.0pts) Resuelva la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} dx \quad (3)$$

Solución:

Fracciones parciales : $\frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$

$$\hookrightarrow 2x+1 = A(x-4) + B(x-1)$$

Damos valores a x :

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow 3 = -3A \rightarrow A = -1 \\ x=4 &\rightarrow 9 = 3B \rightarrow B = 3 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + 3\int \frac{1}{x-4} dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-4| + C$$

4. (2.0pts) Explica conceptualmente por qué el siguiente resultado **no es correcto**:

$$\int_{-3}^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{4}{3} \quad (4)$$

Solución:

La función $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ no está definida para todo $x \in [-3; 1]$ ($-2 \notin D_f$)

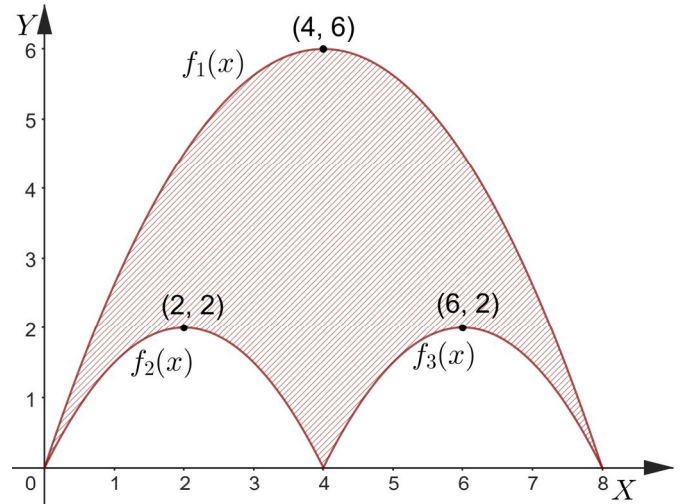
5. (3.0pts) Considere la figura formada por las funciones cuadráticas $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$. Determine el área de la figura si se sabe que las funciones son:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}(x-4)^2 + 6,$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2, \quad (5)$$

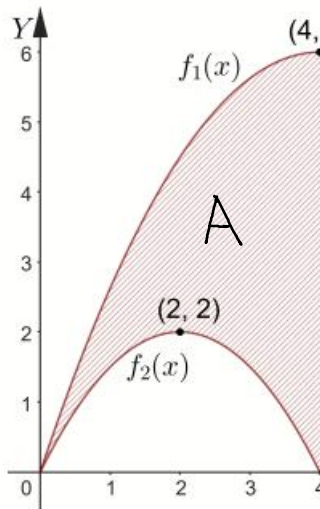
$$f_3(x) = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 2$$

Nota: Observe que la figura es simétrica respecto a la recta $x = 4$.



Solución: Por simetría será suficiente calcular el área de $x=0$ a $x=4$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left(-\frac{3}{8}(x-4)^2 + 6 - \left(-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 \right) \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{3}{8}(x^2 - 8x + 16) + 6 + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 2 \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^2 + x \right) dx = \left. \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right|_0^4 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$



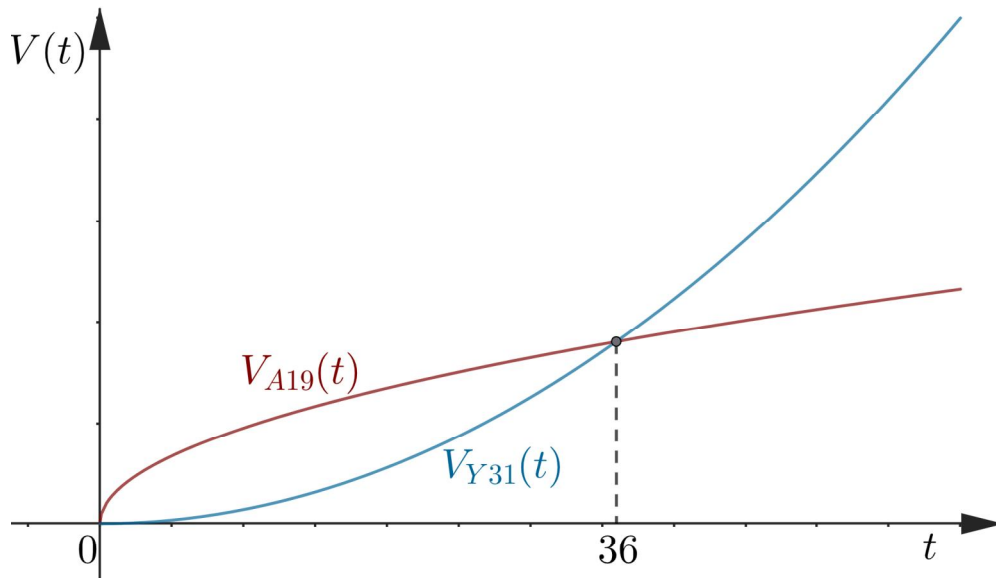
$$A_{\text{TOTAL}} = 2A = \boxed{\frac{64}{3} \text{ u}^2}$$

Parte II

6. En una carrera de drones de alta velocidad, los modelos A19 y Y31 compiten en una pista rectilínea. Ambos drones parten punto $x = 0$ m, y sus funciones de velocidad, medidas por sensores de movimiento, son:

$$V_{A19}(t) = 3\sqrt{t} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad \text{y} \quad V_{Y31}(t) = \frac{1}{72} t^2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (5)$$

donde t se mide en segundos. Los sensores de movimiento muestran el siguiente gráfico:



- 6.1. (3.0pts) Determine la distancia que separa a ambos drones al finalizar los primeros 36 segundos. ¿Qué dron tiene la ventaja? **Nota:** No olvide las unidades.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Distancia de separación} &= \int_0^{36} V_{A19}(t) - V_{Y31}(t) dt = \int_0^{36} 3\sqrt{t} - \frac{1}{72} t^2 dt \\ &= 3 \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{72} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^{36} \\ &= 2t^{3/2} - \frac{t^3}{216} \Big|_0^{36} \\ &= \boxed{216 \text{ m}} \end{aligned}$$

La ventaja la tiene el dron A19

- 6.2. **(2.5pts)** Determine el instante de tiempo t_E que cumpla la relación mostrada. En el contexto del problema ¿Qué representa t_E ?

$$\int_0^{t_E} [V_{A19}(t) - V_{Y31}(t)] dt = 0 \quad (6.a)$$

Solución: Del ítem anterior:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_E} V_{A19}(t) - V_{Y31}(t) dt &= \int_0^{t_E} 3\sqrt{t} - \frac{1}{72}t^2 dt = 2t^{3/2} - \frac{t^3}{216} \Big|_0^{t_E} = 0 \\ 2t_E^{3/2} - \frac{t_E^3}{216} &= 0 \\ t_E &= 57.15 \text{ s} \end{aligned}$$

Representa el tiempo de encuentro entre ambos drones

- 6.3. **(2.5pts)** En la carrera también participó el dron modelo *SG4*, cuya velocidad se expresa según la función

$$V_{SG4}(t) = \pi t \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right], \quad (6.b)$$

Determine la velocidad promedio de éste dron durante los primeros 25 segundos.

Solución:

$$\bar{V} = \frac{1}{25-0} \int_0^{25} \pi t \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) dt = \frac{\pi}{25} \int_0^{25} t \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) dt$$

M. por partes: $u = t \quad dv = \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) dt$
 $du = dt \quad v = \frac{50}{\pi} \text{Sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{25} \int_0^{25} t \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) dt &= \frac{\pi}{25} \left[\frac{50}{\pi} t \text{Sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right) - \int \frac{50}{\pi} \text{Sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right) dt \right] \\ &= \frac{\pi}{25} \left[\frac{50}{\pi} t \text{Sen}\left(\frac{\pi t}{50}\right) + \frac{50}{\pi} \cdot \frac{50}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{50}\right) \right] \Big|_0^{25} = 18.17 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Bonus

7. (1.0pts) Sean las funciones $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{gk \tan(2x)}}$ y $v(x) = \frac{d\omega}{dx}$, demuestre que $v(x)$ se puede expresar como:

$$v(x) = -gk \sec^2(2x) \omega^3(x) \quad (6)$$

Solución:

$$\omega(x) = (gk \tan(2x))^{-1/2}$$

$$\text{Derivamos: } \omega'(x) = -\frac{1}{2} (gk \tan(2x))^{-3/2} \cdot gk \sec^2(2x) \cdot 2$$

$$\omega'(x) = -gk \sec^2(2x) \cdot \omega^3(x)$$

8. (1.0pts) Calcula la integral $\int_{-1}^1 \frac{x \cos(e^{x^2} x^4)}{\ln(e^{x^2} + 2)} dx$. ¡Ojo!: No necesitas mucho espacio.

Solución:

$$f(-x) = \frac{-x \cos(e^{x^2} x^4)}{\ln(e^{x^2} + 2)} = -f(x) \rightarrow \text{es IMPAR}$$

$$\hookrightarrow \int_{-1}^1 \frac{x \cos(e^{x^2} x^4)}{\ln(e^{x^2} + 2)} dx = 0$$

9. (1.0pts) ¿Qué representa la constante de integración en una integral indefinida? ¿Se puede calcular? ¿Cómo? Explique.

Solución:

La constante de integración representa que hay múltiples funciones que son antiderivada de la función original, esta constante se puede calcular siempre que se tenga un valor inicial o un punto conocido por donde pasa la función resultante.

Anexo 1: Tabla de Integrales

- | | |
|---|---|
| ▪ $\int a \, dx = ax + C$ | ▪ $\int \cot x \, dx = \ln \sin x + C$ |
| ▪ $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ | ▪ $\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x + C$ |
| ▪ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | ▪ $\int \csc x \, dx = \ln \csc x - \cot x + C$ |
| ▪ $\int e^x \, dx = e^x + C$ | ▪ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| ▪ $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$ | ▪ $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| ▪ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ | ▪ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| ▪ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ | ▪ $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$ |
| ▪ $\int \tan x \, dx = \ln \sec x + C$ | |

Anexo 2: Tabla de Derivadas

- | | |
|---|--|
| ▪ $\frac{d}{dx} c = 0$ | ▪ $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} x = 1$ | ▪ $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ | ▪ $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ | ▪ $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ | ▪ $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ | ▪ $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$ | ▪ $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ | ▪ $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$ |
| ▪ $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ | |

Examen Final

Cálculo de una Variable

2025 - 1

INDICACIONES GENERALES

Lea estas indicaciones antes de realizar la evaluación:

■ **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**

- En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUE SU PRUEBA.**
- **Está permitido el uso de calculadoras (no graficadoras).**
- Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
- Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.

■ **Sobre la evaluación**

- Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
- Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
- La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
- **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
- Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros**. Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!