



UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Examen Final

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:

Nombres:

Sección:

Parte 1 (12.0 puntos)

1. [2.0 puntos] Calcula la derivada de $f(x) = \int_1^{\frac{\sin(x)}{x}} \frac{du}{u^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x^2}{(\sin x)^2 + x^2} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{(\sin x)^2 + x^2}$$

2. Resuelve detalladamente las siguientes integrales:

- 2.1. [2.0 puntos] $\int \ln(\sin(x)) \cos(x) dx$, $\sin(x) > 0$

M. Sustitución: $\sin x = t$ $t > 0$
 $\cos x dx = dt$

$$\int \ln(\sin x) \cos x dx = \int \ln(t) dt, \text{ Método por partes } \begin{matrix} u = \ln t & dv = dt \\ du = \frac{1}{t} dt & v = t \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \int \ln(\sin x) \cos x dx &= \int \ln(t) dt = t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt = t \ln t - t + C \\ &= \sin x \cdot \ln(\sin x) - \sin x + C \end{aligned}$$

2.2. [3.0 puntos] $\int \frac{x}{(x-a)(x-b)} dx, \quad a \neq b$

Fracciones Parciales: $\frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$

$\hookrightarrow x = A(x-b) + B(x-a)$

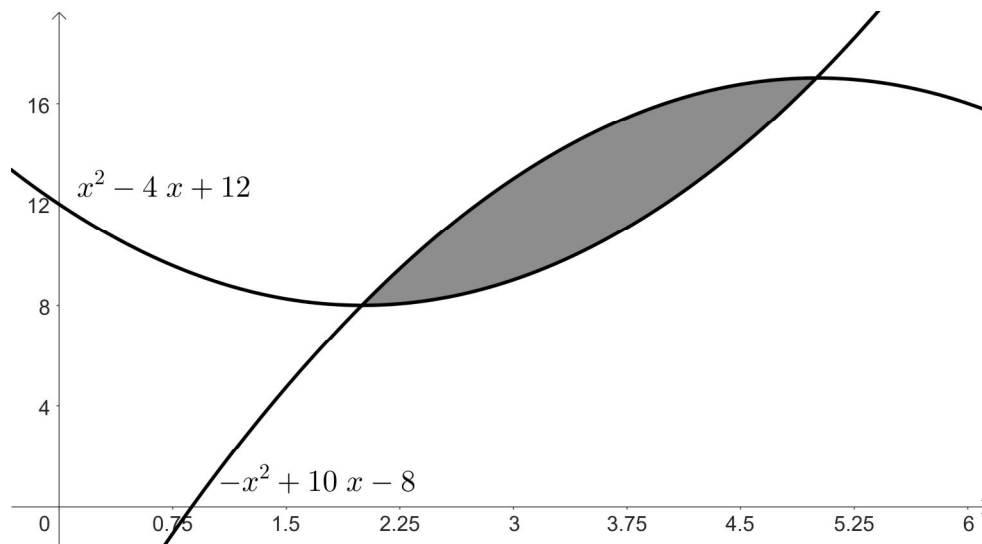
Dando valores: $x=a \rightarrow a = A(a-b) \rightarrow A = \frac{a}{a-b}$

$x=b \rightarrow b = B(b-a) \rightarrow B = \frac{b}{b-a}$

$\hookrightarrow \int \frac{x}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{a}{a-b} \int \frac{1}{x-a} dx + \frac{b}{b-a} \int \frac{1}{x-b} dx = \frac{a}{a-b} \ln|x-a| + \frac{b}{b-a} \ln|x-b| + C$

3. En los siguientes ejercicios:

3.1. [3.0 puntos] Calcula el área de la región sombreada entre las dos curvas:



Hallamos intersecciones: $x^2 - 4x + 12 = -x^2 + 10x - 8$
 $2x^2 - 14x + 20 = 0$
 $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

$$A = \int_2^5 (-x^2 + 10x - 8) - (x^2 - 4x + 12) dx = \int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20) dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 20x \Big|_2^5$$

$$= -\frac{25}{3} - \left(-\frac{52}{3}\right) = 9$$

3.2. [2.0 puntos] Explica conceptualmente por qué el siguiente resultado NO ES CORRECTO:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^3} dx = 0$$

La función $f(x) = \frac{1}{x^3}$ NO está definido en todo el intervalo $[-1; 1]$ ($0 \notin D_f$)

Parte 2

(8.0 puntos)

4. La insulina es una hormona del páncreas que regula la glucosa en la sangre. Al comer carbohidratos, estos se transforman en glucosa, que pasa a la sangre. La insulina permite que los tejidos absorban y almacenen esa glucosa. En la diabetes tipo 1, no se produce suficiente insulina, por lo que esta requiere ser inyectada.

La Figura 1 muestra las tasas de absorción de glucosa (en mg/min) en el cuerpo de dos sujetos diabéticos durante un lapso de 4 horas luego de la inyección de insulina tipo A, para uno, y tipo B, para el otro. Las tasas fueron modeladas mediante las siguientes funciones:

$$A(x) = 40e^{-x}(-x^2 + 4x)$$

$$B(x) = 40e^{-x}(x^2 + 2x)$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ se miden en gramos/hora de glucosa absorbida, y $x \in [0, 4]$ horas.

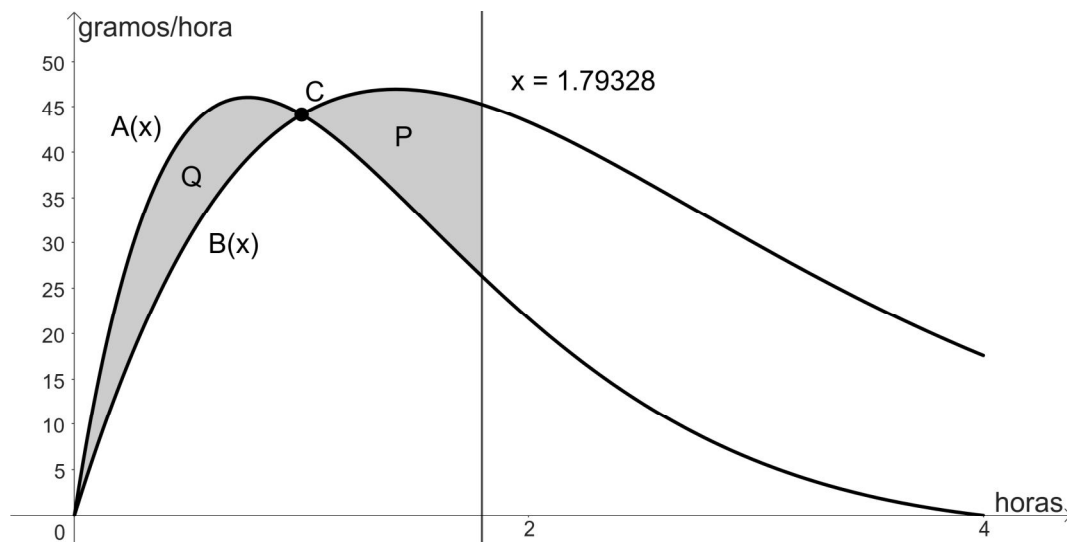


Figura 1: Tasas A y B de absorción de glucosa (en mg/min) vs el tiempo (en horas) luego de la inyección de insulina.

- 4.1. [2.0 puntos] Encuentra las coordenadas del punto C en la Figura 1 y explica brevemente qué indica este punto en el proceso que estamos estudiando.

Igualemos: $A(x) = B(x) \rightarrow 40e^{-x}(-x^2 + 4x) = 40e^{-x}(x^2 + 2x)$

$$-x^2 + 4x = x^2 + 2x$$

$$0 = 2x^2 - 2x$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

Reemplazamos: $A(1) = 40e^{-1}(-1 + 4) = 44.15$

Punto $C = (1; 44.15)$

- 4.2. [3.0 puntos] Calcula el área sombreada Q en la Figura 1 entre las curvas $A(x)$ y $B(x)$, desde $x = 0$ hasta el punto C . Aproxima tu resultado a dos decimales y explica brevemente qué representa. **Sugerencia:** No olvides las unidades.

$$Q = \int_0^1 40e^{-x}(-x^2+4x) - 40e^{-x}(x^2+2x) dx = \int_0^1 40e^{-x}(-2x^2+2x) dx$$

$$= 80 \int_0^1 e^{-x}(-x^2+x) dx$$

M. por partes : $u = -x^2+x$ $dv = e^{-x}dx$
 $du = -2x+1$ $v = -e^{-x}$

$$\int e^{-x}(-x^2+x) dx = -e^{-x}(-x^2+x) - \int -e^{-x}(-2x+1) dx$$

M. por partes : $u = -2x+1$ $dv = -e^{-x}dx$
 $du = -2dx$ $v = e^{-x}$

$$\int e^{-x}(-x^2+x) dx = -e^{-x}(-x^2+x) - (e^{-x}(-2x+1) - \int e^{-x}(-2)dx)$$

$$= -e^{-x}(-x^2+x) - e^{-x}(-2x+1) + 2e^{-x}$$

$$\hookrightarrow Q = 80 \left[-e^{-x}(-x^2+x) - e^{-x}(-2x+1) + 2e^{-x} \right]_0^1 = 8.291 \text{ g}$$

- 4.3. [3.0 puntos] En la Figura 1, el área sombreada P entre el punto C y la vertical $x = 1.79328$ es numéricamente igual a Q . La integral $\int_0^{1.79328} (A(x) - B(x)) = 0$. Explica brevemente qué significa este resultado en el contexto en el que estamos trabajando.

En las primeras 1.79328 horas la cantidad de glucosa absorbida en ambos sujetos es la misma (la diferencia es 0)

Parte 3 - Bonus

(3.0 puntos)

5. Resuelve los siguientes ejercicios:

- 5.1. [1.0 puntos] Considera la función $R(x) = f(x)^{g(x)}$, donde $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \ln(x)$ para $x \in (0, \pi]$. Calcula $R'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **Sugerencia:** Puedes usar derivación implícita o logarítmica.

$$\begin{aligned}
 R(x) &= f(x)^{g(x)} \\
 \ln(R(x)) &= g(x) \cdot \ln(f(x)) \\
 \text{Derivamos: } \frac{1}{R(x)} \cdot R'(x) &= g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \\
 R'(x) &= \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right] R(x) \\
 \text{Reemplazando: } R'(x) &= \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right] (\sin x)^{\ln x} \\
 R'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

- 5.2. [1.0 puntos] Calcula la integral $\int_{-4}^{+4} \left(x \cos(x^2) e^{-x^2} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx$. **¡Ojo!** No necesitas mucho espacio.

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= -x \cos(x^2) \cdot e^{-x^2} - \frac{x}{x^2+1} = -f(x) \rightarrow \text{es IMPAR} \\
 \hookrightarrow \int_{-4}^{+4} \left(x \cos(x^2) e^{-x^2} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx &= 0
 \end{aligned}$$

- 5.3. [1.0 puntos] Calcula la integral $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$, si $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$ y el valor promedio de f es $\bar{f} = \sqrt{2}$, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
 \bar{f} &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx = \sqrt{2} \\
 \hookrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx &= \frac{\sqrt{2} \pi}{2}
 \end{aligned}$$

Anexo 1: Tabla de Integrales

- $\int a dx = ax + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
- $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
- $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

Anexo 2: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Examen Final

Cálculo de una Variable

2025 - 1

INDICACIONES GENERALES

Lea estas indicaciones antes de realizar la evaluación:

- **La evaluación es INDIVIDUAL. Actos de deshonestidad:**
 - En caso se detecte que el estudiante intente o esté cometiendo un acto de deshonestidad académica (copia o plagio), o tenga conocimiento de lo anterior y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, calificándose la evaluación con **nota CERO, no reemplazable. NO ARRIESGUE SU PRUEBA.**
 - **Está permitido el uso de calculadoras (no graficadoras).**
 - Está prohibido revisar sus teléfonos celulares o tomar fotos durante el tiempo asignado para resolver el examen, bajo anulación inmediata de tu prueba.
 - Es necesario obedecer a todas las indicaciones de los encargados en el aula durante la prueba. Debes permanecer en silencio y proteger tu trabajo ante intentos de copia, el no obedecer las indicaciones también es causal de anulación inmediata de la prueba.
- **Sobre la evaluación**
 - Se te sugiere **leer toda la evaluación** antes de comenzar.
 - Ten a la mano tu documento de identidad (DNI) con fotografía actualizado. Firma (o escribe tu nombre) en **todas las páginas** de esta evaluación. **LLAMA INMEDIATAMENTE AL ENCARGADO SI NO CUENTAS CON IDENTIFICACIÓN CON FOTO.**
 - La resolución del examen debe ser a mano, con lápiz o lapicero azul o negro. Si la escritura no es clara y/o no presenta desarrollo **NO SE REVISARÁ LA EVALUACIÓN.**
 - **Los profesores solo responderán consultas 25 minutos después del comienzo de la evaluación y 25 minutos antes de su término.**
 - Escribe tus **soluciones únicamente en los cuadros.** Cualquier escrito fuera de estos será considerado borrador y no será revisado.

¡Muchos éxitos!