

Examen Final

Cálculo de una Variable

2025 - 0

La Evaluación es INDIVIDUAL

Actos de Dishonestidad:

En caso se detecte que el estudiante esté cometiendo un acto de deshonestidad académica, ya sea copia, plagio, u otra; o es perpetrador, cómplice o tenga conocimiento y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, clasificándose la evaluación con nota **CERO y sin opción de recuperación**.

Indicaciones:

- Este examen consta de dos partes:
 - Parte I, con un total de 8 puntos.
 - Parte II, con un total de 12 puntos.
- Debe colocar su nombre completo en el recuadro indicado y en la parte superior de cada hoja de la evaluación.
- Debe mantener siempre sobre la carpeta su documento de identidad (DNI, carné de extranjería, carné universitario, etc).
- La duración de la evaluación es de 100 minutos.
- Escribir preferentemente con lapicero azul o negro. Evitar el uso de lapicero rojo o lápiz (con el fin de evitar problemas de resolución en el escaneo).
- Se permite el uso de calculadora científica (no se permiten graficadoras).
- No se permite el uso de celulares ni de ningún otro dispositivo electrónico, a riesgo de anulación del examen.
- No desglosar las hojas de la evaluación.
- Finalizado el tiempo, deberán entregar su evaluación siguiendo las indicaciones que se den.
- Los profesores y/o asistentes tienen la potestad de anular el examen a quien desobedezca las indicaciones que se den.

Anexo 1: Tabla de Integrales

- $\int a \, dx = ax + C$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$
- $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$
- $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

Anexo 2: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Examen Final

Nombres y Apellidos:

Firma:

Parte I

1. Determine si las proposiciones son verdaderas o falsas.

1a. (0.5pts) Se cumple que $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \forall b \in \text{Dom} f = [a, c]$.

☐ Verdadero.

☐ Falso.

1b. (0.5pts) Es correcto afirmar que $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \left[\frac{b-a}{n} \right]$.

☐ Verdadero.

☐ Falso.

2. Resuelva las siguientes integrales

2a. (1.0pts) $\int 8x^3 \cos(2x^4 + 9) dx$

Solución:

2b. (2.0pts) $\int x^2 \ln(x) \, dx$

Solución:

2c. (2.0pts) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 6} \, dx$

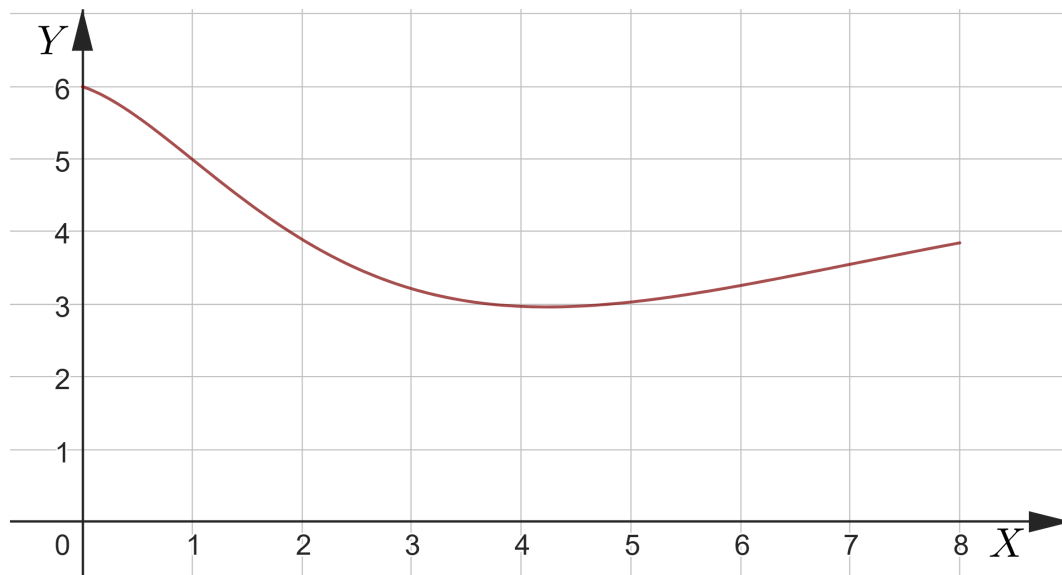
Sugerencia: busque un cambio de variable que lleve la integral a fracciones parciales.

Solución:

3. (2.0pts) Considere la función definida como

$$f(x) = (1 - x^2) e^{-0.5x} + 5, \quad 0 \leq x \leq 8$$

cuyo gráfico se presenta a continuación:



Determine el área bajo la curva mediante una suma de Riemann superior considerando 4 subintervalos.

Nota: Use la función dada para calcular los valores correspondientes.

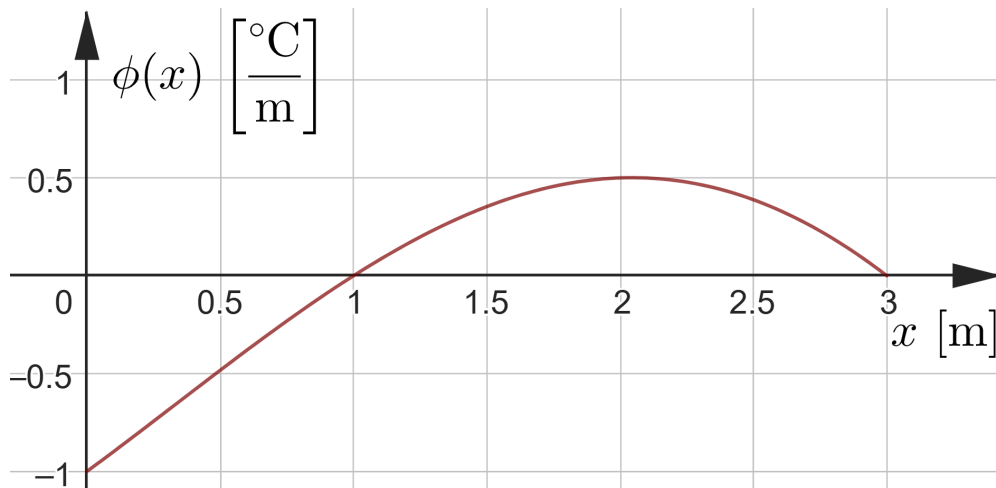
Solución:

Parte II

4. Considere una barra homogénea fabricada con un material recientemente descubierto. Con el objetivo de analizar sus propiedades térmicas, la barra será expuesta a una fuente de calor. Como resultado de este experimento, se ha determinado que la variación de temperatura (flujo térmico) a lo largo de la barra está dada por:

$$\phi(x) = (x - 1) \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}\right]$$

en donde x representa el punto en donde se realiza la medición respecto a uno de sus extremos. Si la barra tiene una longitud de 3 metros, el gráfico que se obtiene es el siguiente:



En base a la información dada, responda:

- 4a. **(2.0pts)** Determine el área neta en el intervalo de 0 a 3 metros. ¿Qué información representa este resultado? ¿Qué unidades tiene?
- 4b. **(2.0pts)** Si el flujo térmico promedio a lo largo de toda la barra fue de $0.057 \text{ }^{\circ}\text{C}/\text{m}$, y la temperatura en la posición $x = 0 \text{ m}$ es de $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿Qué temperatura será medida en el extremo opuesto de la barra?
- 4c. **(2.0pts)** Determine en qué punto de la barra la temperatura será mínima. Justifique adecuadamente.

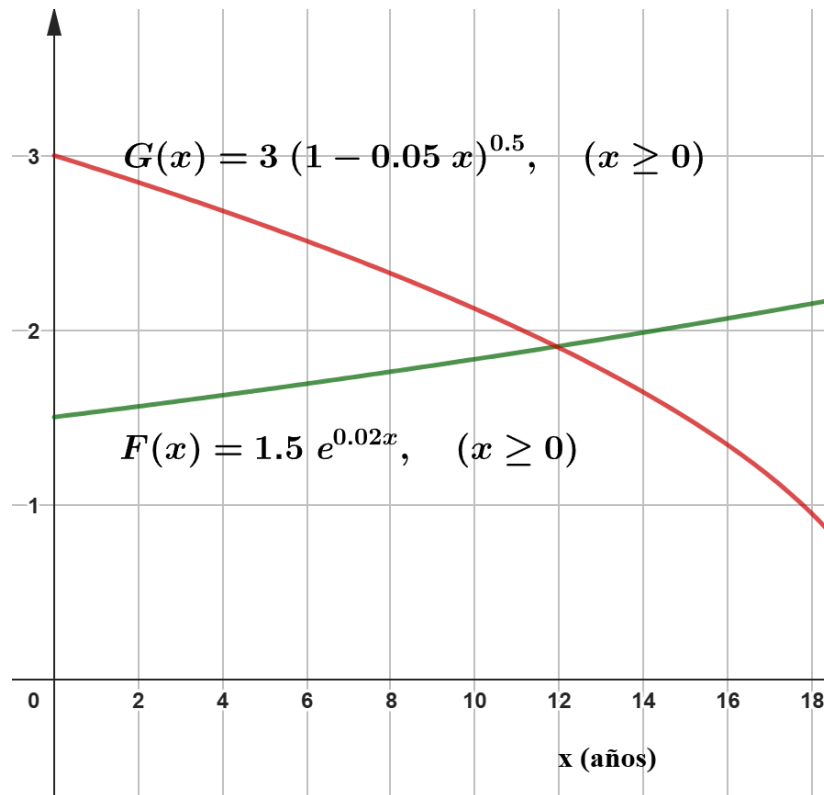
Solución:

Solución:

5. Una empresa minera evalúa la posibilidad de extraer cobre de una nueva mina. La empresa trabaja con dos métodos de extracción, cuyas tasas, en millones de toneladas por año, se modelan con las siguientes funciones:

Método G: $G(x) = 3(1 - 0.05x)^{0.5}$

Método F: $F(x) = 1.5e^{0.02x}$



- 5a. **(2.0pts)** Calcula el área limitada entre ambas curvas en el intervalo de 0 a 10. ¿Qué representa este resultado?
Sugerencia: Escribe el resultado con las unidades correspondientes.
- 5b. **(2.0pts)** ¿Cuánto tiempo le tomará a la empresa extraer 35 millones de toneladas si usa el **Método G**?
- 5c. **(2.0pts)** La empresa evalúa utilizar el **Método F** porque representa un menor costo operativo, sin embargo, el método deja de ser rentable si el promedio de la tasa de extracción de cobre es inferior a 1.5 millones de toneladas de cobre por año, durante los primeros 15 años. ¿Será rentable el **Método F**? Justifique su respuesta con los cálculos correspondientes.

Solución:

Solución: