

Examen Final

Cálculo de una Variable

2025 - 0

La Evaluación es INDIVIDUAL

Actos de Dishonestidad:

En caso se detecte que el estudiante esté cometiendo un acto de deshonestidad académica, ya sea copia, plagio, u otra; o es perpetrador, cómplice o tenga conocimiento y no lo reporte, se aplicará lo establecido en el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Ingeniería y Tecnología, clasificándose la evaluación con nota **CERO y sin opción de recuperación**.

Indicaciones:

- Este examen consta de dos partes:
 - Parte I, con un total de 8 puntos.
 - Parte II, con un total de 12 puntos.
- Debe colocar su nombre completo en el recuadro indicado y en la parte superior de cada hoja de la evaluación.
- Debe mantener siempre sobre la carpeta su documento de identidad (DNI, carné de extranjería, carné universitario, etc).
- La duración de la evaluación es de 100 minutos.
- Escribir preferentemente con lapicero azul o negro. Evitar el uso de lapicero rojo o lápiz (con el fin de evitar problemas de resolución en el escaneo).
- Se permite el uso de calculadora científica (no se permiten graficadoras).
- No se permite el uso de celulares ni de ningún otro dispositivo electrónico, a riesgo de anulación del examen.
- No desglosar las hojas de la evaluación.
- Finalizado el tiempo, deberán entregar su evaluación siguiendo las indicaciones que se den.
- Los profesores y/o asistentes tienen la potestad de anular el examen a quien desobedezca las indicaciones que se den.

Anexo 1: Tabla de Integrales

- $\int a \, dx = ax + C$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$
- $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$
- $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{a} \right) + C$
- $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

Anexo 2: Tabla de Derivadas

- $\frac{d}{dx} c = 0$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (\ln x + 1)$

Examen Final

Nombres y Apellidos:

Firma:

Parte I

1. Determine si las proposiciones son verdaderas o falsas.

1a. (0.5pts) Si se cumple que $\int_a^b f(x) dx = 0$, entonces $f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.

☐ Verdadero.

☐ Falso.

1b. (0.5pts) Si $F(x)$ y $G(x)$ tienen la misma derivada, entonces necesariamente $F(x) = G(x)$.

☐ Verdadero.

☐ Falso.

2. Resuelva las siguientes integrales

2a. (1.0pts) $\int \frac{4x}{\sqrt[5]{3x^2 + 4}} dx$

Solución:

2b. (2.0pts) $\int (x^2 + 3x - 1) e^{2x} dx$

Solución:

2c. (2.0pts) $\int \frac{\sec^2(x)}{\tan(x) [\tan(x) - 4]} dx$

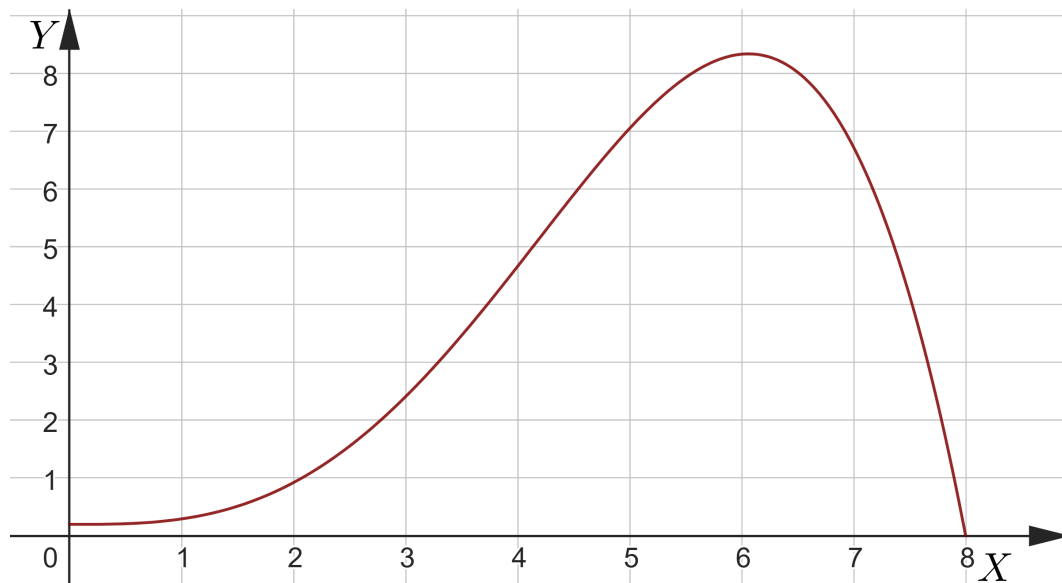
Sugerencia: busque un cambio de variable que lleve la integral a fracciones parciales.

Solución:

3. (2.0pts) Considere la función definida como

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{10} \cos\left(\frac{\pi x}{16}\right), \quad 0 \leq x \leq 8$$

cuyo gráfico se presenta a continuación:



Determine el área bajo la curva mediante una suma de Riemann **superior** considerando 4 subintervalos.

Nota: Use la función dada para calcular los valores correspondientes.

Solución:

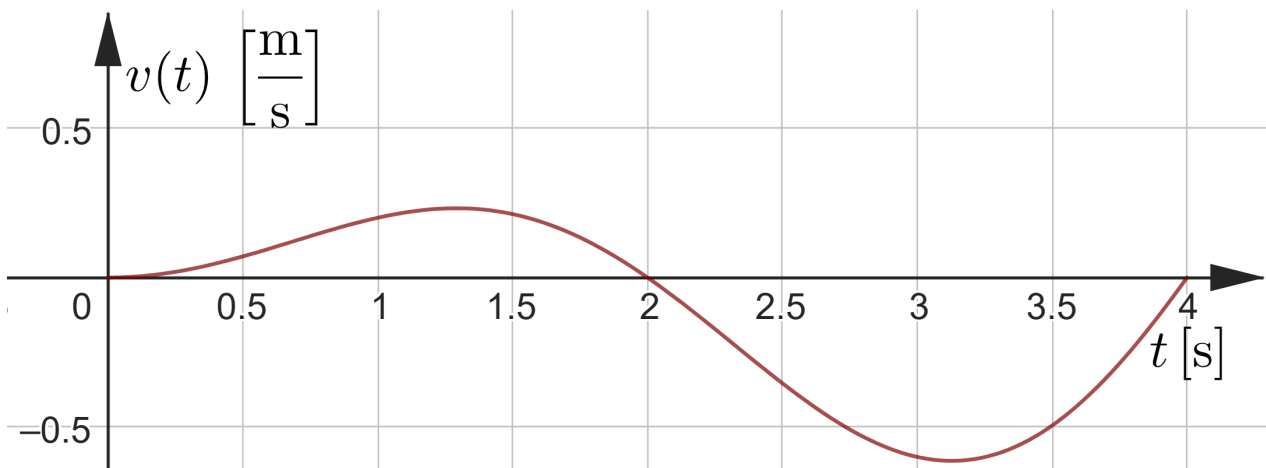
Parte II

4. Considere una partícula inmersa en un medio viscoso que opone resistencia a su movimiento. Si se intenta forzar a la partícula a oscilar, la viscosidad del medio disipará gradualmente la energía del sistema, provocando que el movimiento se detenga después de un cierto tiempo.

Para una partícula que se mueve en un sistema específico de este tipo, las leyes de Newton permiten determinar que su velocidad obedece a la siguiente expresión:

$$v(t) = \frac{t}{5} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

y que dicho movimiento tendrá una duración de 4 segundos. A continuación se muestra el gráfico velocidad versus tiempo para el sistema mencionado.



En base a la información dada, responda:

- 4a. **(2.0pts)** Determine el área neta en el intervalo de 0 a 4. ¿Qué información representa este resultado? ¿Qué unidades tiene?
- 4b. **(2.0pts)** Si la velocidad promedio en todo el tiempo que duró el movimiento fue de -0.125 m/s , y el movimiento inicia en la posición $x = 0.5 \text{ m}$, ¿En qué posición se encontrará en $t = 4 \text{ s}$?
- 4c. **(2.0pts)** Determine el instante de tiempo en donde la partícula alcanza su posición máxima. Justifique adecuadamente.

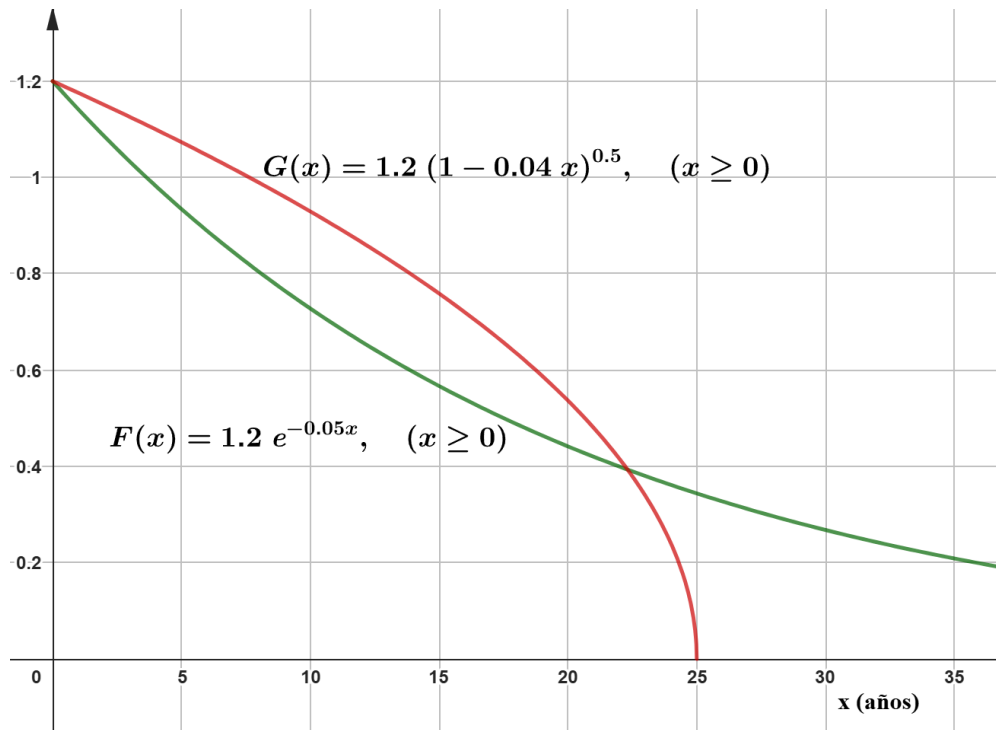
Solución:

Solución:

5. Una compañía petrolera busca una concesión para la extracción de petróleo en cierta región, con reserva estimada de 15 mil millones de barriles. Evalúa dos métodos de extracción, cuyas tasas, en miles de millones de barriles por año, se modelan con las siguientes funciones:

Método A: $G(x) = 1.2(1 - 0.04x)^{0.5}$

Método B: $F(x) = 1.2e^{-0.05x}$



- 5a. **(2.0pts)** Calcula el área limitada entre ambas curvas en el intervalo de 0 a 20. ¿Qué representa este resultado? **Nota:** Escribe el resultado con las unidades correspondientes.
- 5b. **(2.0pts)** Si la reserva es de 15 mil millones de barriles, ¿durante cuántos años conviene mantener la concesión para la extracción del petróleo, si la empresa decide usar el método A?
- 4c. **(2.0pts)** La empresa evalúa utilizar el método B porque representa un menor costo operativo aunque necesite 20 años de operaciones, sin embargo, el método deja de ser rentable si el promedio de la tasa de extracción es inferior a 0.90 mil millones de barriles por año. ¿Será rentable el método B? Justifique su respuesta con los cálculos correspondientes.

Solución:

Solución: