

Examen Final

Cálculo de una variable, 2024-1

Apellidos:

Nombres:

Sección:

Duración: 100 minutos

INDICACIONES GENERALES

Lea estas indicaciones antes de realizar el Examen Final (EF):

- (1) El EF versa sobre los conceptos teóricos y prácticos aprendidos durante las sesiones de auditorio virtual y de aula.
- (2) El EF es **estrictamente individual**. Los siguientes supuestos son considerados como **actos deshonestos durante el EF y corresponderá al docente calificar con la nota AN (Anulado)** en la evaluación cuando el estudiante:
 - (a) Incurra, promueva o permita la **copia durante esta evaluación**, lo cual constituye una infracción muy grave según el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes.
 - (b) Participe o permita la **suplantación durante el EF**, lo cual también constituye una infracción muy grave según el Reglamento de Disciplina de los Estudiantes.
- (3) Durante esta prueba, el estudiante:
 - (a) Tiene **prohibido el uso de dispositivos electrónicos de comunicación** (laptop, tabletas, celulares, relojes inteligentes, etc) bajo pena de anulación de su EF.
 - (b) Tiene **prohibido el uso de las funciones de derivación, integración y gráficos de sus calculadoras científicas** bajo pena de anulación de su EF.
 - (c) Deberá **mantener visible sobre la mesa su documento de identidad** (DNI o similares) actualizado, donde sean claros su nombre y fotografía.
 - (d) Será responsable de **firmar la lista asistencia** que el encargado de aula disponga en el aula, de lo contrario su prueba no será considerada y su nota será cero (0).
- (4) Acerca de esta Evaluación:
 - (a) Su EF consta de **4 preguntas para desarrollar**, cuyo puntaje total suma 20 puntos, y **1 pregunta bono** de 3 puntos extra.
 - (b) **Lea y firme todas las páginas de la evaluación** antes de comenzar. Escriba su **nombre completo y sección** en esta página.
 - (c) Desarrolle esta evaluación **clara y ordenadamente en los recuadros indicados**, usando lápiz o lapicero (azul y/o negro). De lo contrario, su EF no será calificado.
 - (d) Los docentes responderán consultas únicamente a los 20 minutos luego de iniciada la prueba y 20 minutos antes del final de esta.
 - (e) **No desglose las hojas de esta evaluación**. Entregue la totalidad del material al finalizar su prueba.

PARTE I

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas con los métodos aprendidos en clase:

1.1. **(2 puntos)** $\int x e^{5x} dx$

1.2. **(2 puntos)** $\int \frac{1}{200x - x^2} dx$

1.3. **(2 puntos)** $\int \frac{x \cos(\ln(x^2 + 1))}{x^2 + 1} dx$

2. (1 puntos) Se tiene la siguiente función:

$$f(x) = \ln(x+1) \cdot \int_1^{x^2} \sin(t+5)e^{-2(t-1)^2} dt \quad (1)$$

Calcule la derivada de $f(x)$ evaluada en $x = 1$, es decir $f'(1)$. Sugerencia: No es necesario calcular la integral, solo usar las propiedades aprendidas en clase. Por otro lado, el argumento de la función seno está en radianes.

PARTE II

3. En un laboratorio de UTEC, un grupo de estudiantes montó un experimento que consistió en construir dos rieles rectos horizontales sobre los que colocaron dos carritos: el carrito 1, con velocidad v_1 , y el carrito 2, con velocidad v_2 . Además, un sensor se encargó de recoger los valores de la velocidad de los carritos durante el experimento, los cuales son tabulados y mostrado en la Tabla 1

t	$v_1(t)$	$v_2(t)$
0.	48.	48.
2.	24.	0.
3.	0.	-21.
4.4	-32.26	-32.26
6.	-48.	0.
8.	0.	144.

Tabla 1: Datos experimentales recogidos por el sensor. El tiempo fue medido en segundos y las velocidades en m/s.

A partir de estos datos, la velocidad del primer carrito fue modelada por la siguiente función

$$v_1(t) = t^3 - 9t^2 + 2t + 48, \quad (2)$$

medida en m/s. Para el otro carrito, la velocidad fue representada por

$$v_2(t) = t^3 - 4t^2 - 20t + 48, \quad (3)$$

también en m/s. El experimento tiene una duración de 8 segundos.

Se define el **desplazamiento** como el **área neta** de la función velocidad respecto del tiempo y se define la **distancia recorrida** como el **área total** de la función velocidad respecto del tiempo.

- 3.1. (2 puntos) Con los datos de la Tabla 1, mediante suma de Riemann inferior, aproxime la **distancia recorrida** del carrito 1 en los 8 segundos de análisis. Sugerencia: Use todos los datos de la Tabla 1 y tenga en cuenta que las longitudes de los cinco subintervalos no será la misma.

- 3.2. (2 puntos) Dadas las velocidades en (2) y (3), calcule el **desplazamiento** del carrito 2, desde el inicio del movimiento hasta el instante en el que su velocidad coincide con la del carrito 1 (ver la Figura 1).

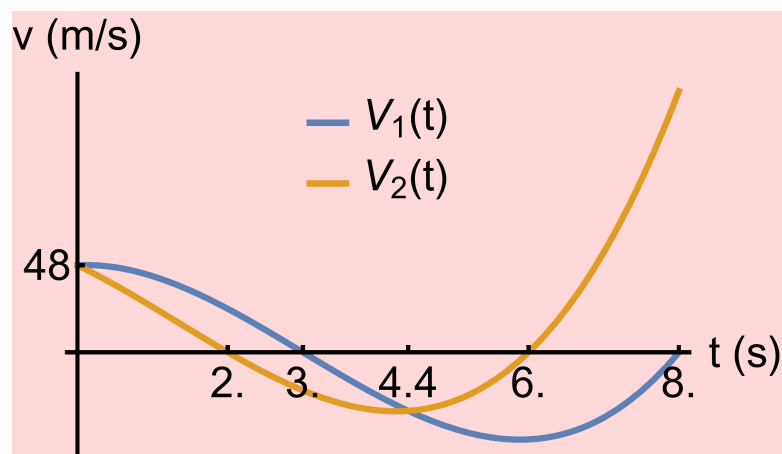


Figura 1: Gráficos de las velocidades v_1 y v_2 .

- 3.3. **(2 puntos)** A partir del hecho que $v(t) = dx(t)/dt$, donde $x(t)$ representa las posiciones de los carritos en t segundos, para este caso, obtenga la regla de correspondencia que describe la posición del carrito 2 con respecto al extremo del riel ($x = 0$), sabiendo que el carrito 2 partió desde $x = 0.1$ metros.

- 3.4. **(1 puntos)** A partir de las velocidades dadas en (2) y (3), calcule la diferencia entre los desplazamientos de ambos carritos durante el experimento. A partir de su resultado, indique cuál de los dos carritos, A o B, lleva la ventaja, si ambos partieron del mismo punto.

4. Se llama corriente eléctrica $I(t)$ al flujo de cargas que pasa por un conductor.

$$\frac{dq(t)}{dt} = I(t), \quad (4)$$

donde $q(t)$ representa la carga eléctrica en un tiempo t en segundos, medida en culombios (C), e I es la corriente eléctrica, medida en amperios (A).

Suponga que se tiene un circuito con un nodo (punto donde el flujo se divide en dos caminos) como se muestra en la Figura 2:

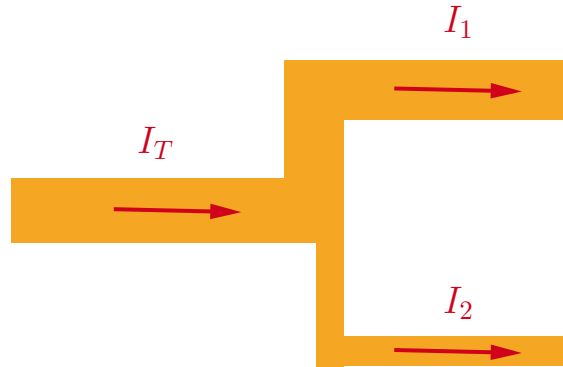


Figura 2: Corriente eléctrica que se divide en dos (superior e inferior) en el nodo.

Se observa que la corriente que entra I_T se reparte en I_1 e I_2 . Considere que las funciones que expresan las corrientes I_1 e I_2 son, respectivamente:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{10e^{2t}}{4 + e^{2t}}, \\ I_2(t) &= \frac{40e^{-2t}}{4 + e^{-2t}} + 2. \end{aligned} \quad (5)$$

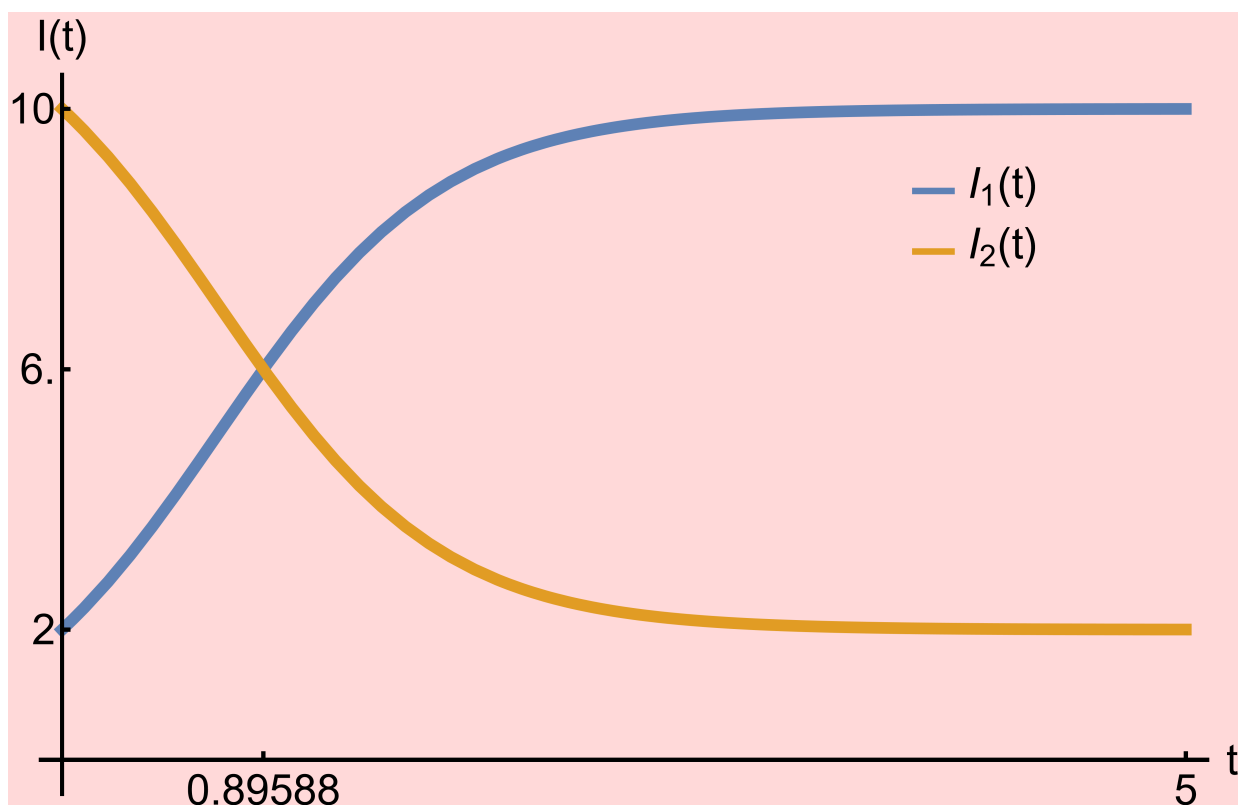


Figura 3: Corrientes a través del conductor superior, I_1 , y a través del inferior, $I_2(t)$.

4.1 **(2 puntos)** Calcule el valor promedio de I_1 durante los 5 primeros segundos.

4.2 **(2 puntos)** Considerando que $I = dq/dt$, calcule Δq para la corriente I_1 en los primeros 5 segundos.

4.3 **(2 puntos)** Calcule Δq para la corriente I_2 desde $t = 0$ hasta cuando ambas corrientes son iguales.

PARTE III - BONO

5. Suponga que algunos estudiantes, en un auditorio de 200 estudiantes, portan el virus de la gripe. La tasa a la cual la enfermedad se esparce es directamente proporcional al producto entre el número de estudiantes con gripe y el número de ellos que no ha sido expuesto a la gripe aún.

5.1. **(0.5 puntos)** Escriba la ecuación diferencial correspondiente.

5.2. **(1.5 puntos)** Separe las variables, aplique fracciones parciales y resuelva las integrales.

5.3. **(1 puntos)** Determine la cantidad de contagiados respecto del tiempo considerando que inicialmente había 100 contagiados y la tasa de propagación de la enfermedad al inicio era 50 estudiantes por día.

2.01 The basic integrals

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x$
3. $\int e^x dx = e^x$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \sin x dx = -\cos x$
- 6.¹¹ $\int \cos x dx = \sin x$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
- 8.¹¹ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
9. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x$
10. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cosec} x$
11. $\int \tan x dx = -\ln \cos x$
12. $\int \cot x dx = \ln \sin x$
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \frac{x}{2}$
14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \ln (\sec x + \tan x)$
15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$
16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$
20. $\int \sinh x dx = \cosh x$
21. $\int \cosh x dx = \sinh x$
- 22.¹¹ $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$
23. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$
24. $\int \tanh x dx = \ln \cosh x$
25. $\int \coth x dx = \ln \sinh x$
26. $\int \frac{dx}{\sinh x} = \ln \tanh \frac{x}{2}$

ESTA HOJA ES BORRADOR

ESTA HOJA ES BORRADOR