

Evaluación de Aula 3 (EA3)

Cálculo de una variable, 2025-1

Apellidos:

Nombres:

Sección:

Duración: **25 minutos**

Preguntas:

1. La concentración de alcohol en la sangre de una persona viene dada por la siguiente función:

$$f(t) = te^{-\frac{t^2}{8}}; \text{definida en: } [0; 8] \quad (1)$$

Donde t es el tiempo en horas.

- a. **(7 puntos)** Determine en qué momento se alcanza la concentración máxima y cual es dicha concentración

Solution:

• Buscamos máxima concentración, entonces calculamos puntos críticos t_c :

$$\frac{df}{dt} = e^{-\frac{t^2}{8}} + t \left(-\frac{2t}{8}\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{8}}$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_c} = e^{-\frac{t_c^2}{8}} \left[1 - \frac{t_c^2}{4} \right] = 0$$

$$4 - t_c^2 = 0$$

$$t_c = \pm 2; \text{ como } t (\text{tiempo}) > 0 \Rightarrow t_c = 2.$$

Verificamos el máximo con la segunda derivada:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = (-2t)e^{-\frac{t^2}{8}} \left[1 - \frac{t^2}{4} \right] - \frac{2t}{4} e^{-\frac{t^2}{8}}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -te^{-\frac{t^2}{8}} \left[1 - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = te^{-\frac{t^2}{8}} \left[\frac{t^2}{4} - \frac{3}{2} \right]$$

De aquí:

$$\left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{t=2} < 0; \text{ en } t=2 \text{ ocurre un máximo.}$$

Luego:

$$f(2) = 2 \cdot e^{-\frac{2^2}{8}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

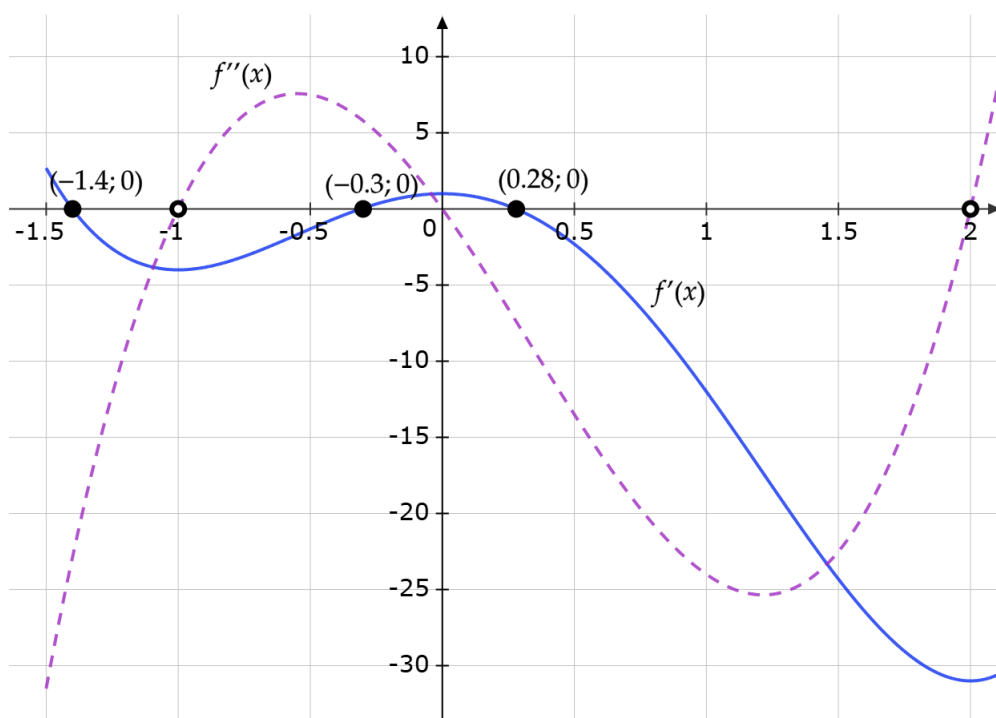
- b. **(3 puntos)** ¿Con qué rapidez cambia la concentración a las 5 horas de ingerido el alcohol?

Solution:

Nos piden:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=5} = e^{-\frac{5^2}{8}} \left[1 - \frac{5^2}{4} \right] = e^{-\frac{25}{8}} \left[1 - \frac{25}{4} \right] = -\frac{21}{4\sqrt{e^{25}}}$$

2. En la siguiente figura se tiene a la derivada y segunda derivada de una función desconocida definida en el intervalo $-1,5 \leq x \leq 3$



Determine:

- a. (5 puntos) Los valores de x en la figura, para los cuales se dan máximos o mínimos. Justifique su respuesta.

Solution:

- De la gráfica, se observa que la curva azul es $f'(x)$. Entonces:
- Cuando $x = \{-1,4; 0,28\}$, $f(x)$ presenta un máximo, ya que se observa como $f'(x)$ pasa de positivo a negativo en esos puntos.
- Cuando $x = -0,3$, $f(x)$ presenta un mínimo, ya que se observa como $f'(x)$ pasa de negativo a positivo en ese punto.

- b. (5 puntos) Los intervalos de concavidad de la función. Justifique su respuesta.

Solution:

- Según la gráfica, $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $x = \{-1; 0\} \cup \{2; \infty\}$, ya que aquí $f''(x) > 0$.
- Según la gráfica, $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $x = \{-\infty; -1\} \cup \{0; 2\}$, ya que aquí $f''(x) < 0$.