

Evaluación de Aula 3 - Optimización

Cálculo de una variable, 2025-1

APELLIDOS:

NOMBRES:

Sección:

Duración: **25 minutos**

1. Sea la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = (x - 6)(x - 3)(x + 3), \quad x \in [-4, 7]$$

1.1. [2.5 puntos] Encuentra las raíces de $f(x)$.

Raíces cuando $f(x)=0$: $f(x)=(x-6)(x-3)(x+3)=0$ Luego $f(x)=0$ cuando $x=\{-3; 3; 6\}$	Como los tres valores se encuentran en el dominio, entonces las raíces de $f(x)$ son $x = \{-3; 3; 6\}$
--	--

1.2. [2.5 puntos] Encuentra los puntos críticos de $f(x)$.

$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 12x - 9$; luego: $\left. \frac{df}{dx} \right _{x=x_c} = 3x_c^2 - 12x_c - 9 = 0$	$x_c^2 - 4x_c - 3 = 0$ $x_c = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}$	$x_c = 2 \pm \frac{\sqrt{28}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$ Puntos críticos de $f(x)$: $x_c = \{2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}\} \in \text{Dom } f$
--	--	---

1.3. [2.5 puntos] Encuentra los puntos de inflexión de $f(x)$.

$\frac{d^2f}{dx^2} = 6x - 12$; luego: $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right _{x=x_i} = 6x_i - 12 = 0$	$x_i = 2$ Puntos de inflexión de $f(x)$: $x_i = 2 \in \text{Dom } f$
--	---

1.4. [2.5 puntos] Identifica el gráfico de $f(x)$ e indica las raíces, puntos críticos y de inflexión.

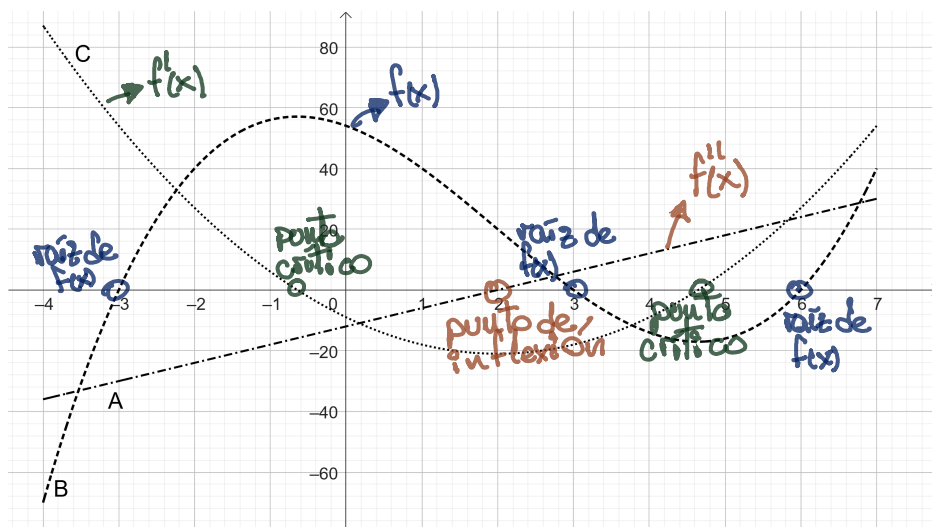


Figura 1: Gráficos de $f'(x)$ y $f''(x)$.

2. Un estudiante de UTEC analiza la temperatura de un computador mientras este corre un nuevo programa. Durante 4 horas modela la temperatura (en $^{\circ}\text{C}$) usando la siguiente función:

$$T(t) = 25(2t^2 + 1) \exp(-t)$$

Un compañero analiza la función y obtiene la siguiente tabla, donde es posible encontrar tanto los puntos críticos como los de inflexión:

t	0.00	0.29	0.78	1.00	1.71	3.22	3.50	4.00
$T'(t)$	-25.00	0.00	10.35	9.20	0.00	-8.85	-8.68	-7.78
$T''(t)$	125.00	52.76	0.00	-9.20	-12.83	0.00	1.13	2.29

- 2.1. [3.0 puntos] Usando la tabla, identifica el intervalo creciente de $T(t)$. Justifica.

$T(t)$ es creciente cuando $T'(t) > 0$, entonces:
 $T(t)$ es creciente en $(0, 29; 1, 71)$

- 2.2. [4.0 puntos] A partir de la tabla, identifica en qué valores de t se dan los máximos locales y cuál es el valor de T en esos puntos. Justifica.

$T(t)$ tiene un máximo local cuando $T'(t) = 0$ y $T'(t)$ pasa de positivo a negativo en ese punto:
 $t: 0, 00 \quad 0, 29 \quad 0, 78 \quad | \quad t: 1, 00 \quad 1, 71 \quad 3, 22$
 $T' < 0 \quad T' = 0 \quad T' > 0 \quad | \quad T' > 0 \quad T' = 0 \quad T' < 0$
 Luego $T(t)$ tiene un máx. local en $t = 1, 71$ con $T(1, 71) = 25[2(1, 71)^2 + 1]e^{-1, 71} = 30, 97^{\circ}\text{C}$

- 2.3. [3.0 puntos] Escribe el intervalo en el que la función es cóncava hacia abajo. Justifica.

$T(t)$ es cóncava hacia abajo cuando $T''(t) < 0$; entonces:
 $T(t)$ es cóncava hacia abajo cuando $t \in (0, 78; 3, 22)$