



HOJA DE IDENTIFICACIÓN

Escriban los datos indicados de cada integrante en el siguiente recuadro:

Nombres y Apellidos	No. DNI	Firma

Colocar el el siguiente cuadro el DNI (escaneado o en foto) de cada integrante:

--

Trabajen en equipo. Sean cuidadosos y ordenados

Evaluación Virtual 1 - Modelo 1

Parte I: Entrada

La entrada es una parte esencial del menú que juega un papel crucial en la experiencia gastronómica. Su función principal es abrir el apetito y preparar el paladar para los platos principales que seguirán.

Esta es, por tanto, la entrada a nuestro menú de esta semana. ¡Empecemos!

Trabajen en equipo. Sean cuidadosos y ordenados

1. **Relaciones y funciones:** Van a trabajar en equipo¹ para generar libremente dos conjuntos, el *input* (entrada o preimagen) y el *output* (salida o imagen). Cada conjunto debe representar una variable cuantitativa (numérica) para analizar si la relación entre ellos es una función o no. A partir de esto:

- 1.1. **[0.5 puntos]** Escriban cinco (5) pares del tipo (x,y) , siendo x los valores de input o entrada e y los de output o salida.

VER EJEMPLO DE ABAJO

- 1.2. **[1.0 puntos]** Grafiquen los puntos en un plano cartesiano, etiquetando correctamente los ejes horizontal y vertical.²

¹Si están trabajando solos o necesitan más datos, les recomendamos contactar a otros equipos para recoger los datos necesarios para este ejercicio

²Utilicen Geogebra u otro graficador y adjunten el gráfico en el espacio disponible. No grafiquen a mano.

- 1.3. [0.5 puntos] Verifiquen si la relación obtenida es una función o solo una relación. Argumenten brevemente su respuesta.

Por ejemplo:

- input x : número de estudiantes de la sección 1.01 de C1V.
- output y : cantidad de horas de estudio previas a un examen.

Datos (x, y) :

- $\{(2,5), (4,8), (2,7), (1,12), (5,6)\}$

Gráfica de los resultados:

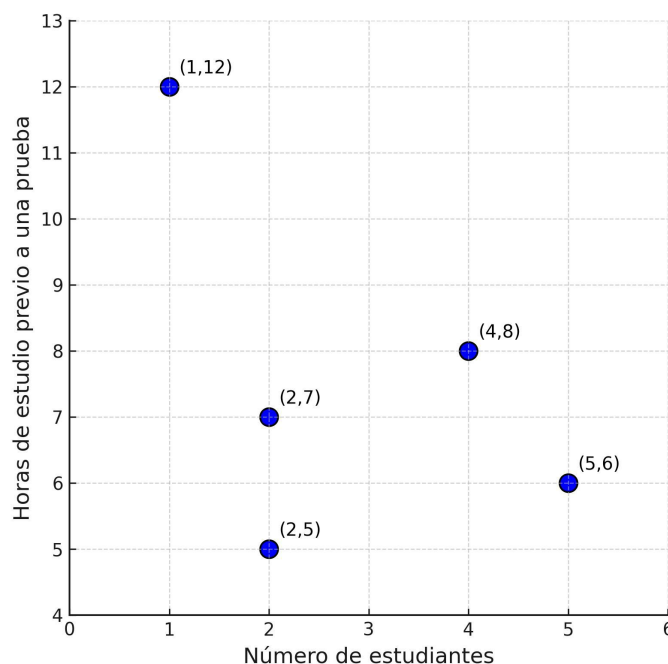


Figura 1: Relación entre el número de estudiantes de C1V y las horas de estudio previos a un examen.

Conclusión: Los datos obtenidos muestran una **relación** entre el número de estudiantes de C1V y las horas de estudio previos a un examen, **no es una función**, ya que no hay una relación uno-a-uno entre los valores graficados. ¡Ahora es su turno, generen su caso!

2. **Funciones, dominio/rango, transformaciones y operaciones:** Consideren las siguientes funciones:

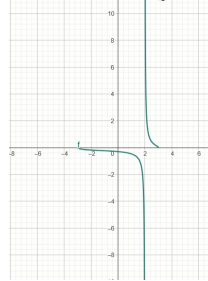
$$Q(t) = \sqrt{9 - t^2}, \quad W(t) = t^2 + 3t - 10, \quad (1)$$

y detalladamente encuentren:

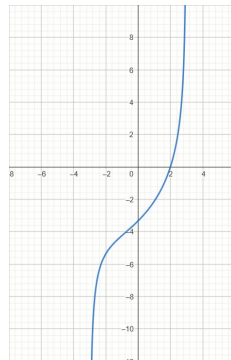
2.1. [0.5 puntos] el dominio y rango de cada función por separado.

Para $Q(t) = \sqrt{9-t^2}$ Dominio $9-t^2 \geq 0$ $(3-t)(3+t) \geq 0$ PC: -3; 3  Rango $-3 \leq t \leq 3$ $0 \leq t^2 \leq 9$ $0 \geq -t^2 \geq -9$ $9 \geq 9-t^2 \geq 0$ $3 \geq \sqrt{9-t^2} \geq 0$ $3 \geq Q(t) \geq 0$ Dom Q = $[-3; 3]$ Ran Q = $[0; 3]$	Para $W(t) = t^2 + 3t - 10$ Dominio Dom W = $\mathbb{R}$ Rango Hallamos vertice: $h = -\frac{3}{2} = -1.5$ $k = -12.25$ Ran W = $[-12.25; +\infty[= [-\frac{49}{4}; +\infty[$
--	---

2.2. [1.0 puntos] el dominio y rango de $J(t) = Q(t)/W(t)$.

Dominio: $J(t) = \frac{\sqrt{9-t^2}}{t^2+3t-10} = \frac{\sqrt{9-t^2}}{(t+5)(t-2)}$ $(t+5)(t-2) \neq 0 \wedge 9-t^2 \geq 0$ $t \neq -5; t \neq 2 \wedge t \in [-3; 3]$ Dom J = $[-3; 3] - \{2\}$	Rango: Usamos el gráfico: (Usando Geogebra)  Ran J = $\mathbb{R}$
--	--

2.3. [1.0 puntos] el dominio y rango de $R(t) = W(t)/Q(t)$.

$R(t) = \frac{(t+5)(t-2)}{\sqrt{9-t^2}}$ Dominio: $9-t^2 > 0$ Dom R = $] -3, 3[$	Rango  Ran R = $\mathbb{R}$
---	---

2.4. [0.5 puntos] el dominio de $S(t) = 4Q(t) + 5W(t)$.

Dom S = $\text{Dom Q} \cap \text{Dom W}$

$[-3; 3] \cap \mathbb{R} = [-3; 3]$

Sugerencia: Pueden ayudarse de los gráficos para el análisis del rango.

3. **Funciones polinómicas:** Resuelve en detalle los siguientes ejercicios:

- 3.1. [1.0 puntos] Encuentren la regla de correspondencia de la función lineal cuya representación gráfica (es decir, la recta) pase por los puntos $\left(\frac{2a}{3}, a+2\right)$ y $\left(\frac{11a}{3}, 10a+2\right)$. Ahora consideren $a = \{-2, 0, 2\}$ y expliquen qué transformación geométrica relaciona a las funciones generadas.

Calculo de Recta: $m = \frac{10a+2 - (a+2)}{\frac{11a}{3} - \frac{2a}{3}} = \frac{9a}{9a} = 3$

Ec. Recta: $y - y_0 = m(x - x_0)$; usamos $(x_0; y_0) = \left(\frac{2a}{3}; a+2\right)$

$$y - (a+2) = 3\left(x - \frac{2a}{3}\right)$$

$$y = 3x - 2a + a + 2$$

$$y = 3x - a + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } a = -2 \rightarrow y = 3x + 4 \\ a = 0 \rightarrow y = 3x + 2 \\ a = 2 \rightarrow y = 3x \end{array} \right\}$$

La transformación geométrica es
traslado vertical

- 3.2. [1.0 puntos] Encuentren la regla de correspondencia de la función cuadrática, cuya representación gráfica (es decir, la parábola) pase por (a, b) y tenga su vértice en el punto $\left(\frac{5a}{3}, 5b\right)$.

Usaremos : $f(x) = A(x-h)^2 + k$

Se tiene : $V(h, k) = \left(\frac{5a}{3}, 5b\right)$; reemplazando :

$$f(x) = A\left(x - \frac{5a}{3}\right)^2 + 5b$$

Para calcular A ; usamos el punto de paso (a, b)

$$b = A\left(a - \frac{5a}{3}\right)^2 + 5b$$

operando : $A = -\frac{9b}{a^2}$

Luego : $f(x) = -\frac{9b}{a^2}\left(x - \frac{5a}{3}\right)^2 + 5b$

- 3.3. [1.0 puntos] Consideren la ecuación de la función cúbica $y(x) = x^3 - 10x^2 - 4x + 40$. Use factorización y encuentren los valores de x donde $y = 0$.

$$y(x) = x^3 - 10x^2 - 4x + 40$$

$$y(x) = x^2(\underline{x-10}) - 4(\underline{x-10})$$

$$y(x) = (x-10)(x^2-4)$$

$$y(x) = (x-10)(x-2)(x+2)$$

$$y=0 \rightarrow (x-10)(x-2)(x+2)=0$$

$$x=10 \quad ; \quad x=2 \quad ; \quad x=-2$$

Trabajen en equipo. Sean cuidadosos y ordenados.

Parte II: Plato Principal

El plato principal es el corazón de cualquier menú, el momento de la comida que generalmente representa la mayor parte de la experiencia culinaria.

Veamos qué creó para ustedes nuestro «chef».

4. **Función cuadrática y transformaciones geométricas:** Un grupo de estudiantes de ingeniería está diseñando una catapulta automatizada, llamada C1V20251SQ, en el laboratorio de UTEC. El grupo sube a probar el aparato al techo de la universidad, a 43 metros de altura y, por seguridad, se alejan 7 metros del borde. Disparan un proyectil, que sigue una trayectoria parabólica cóncava hacia abajo, llegando a una altura máxima de 59 metros a 12 metros de distancia horizontal del punto de lanzamiento (ver Figura 2).

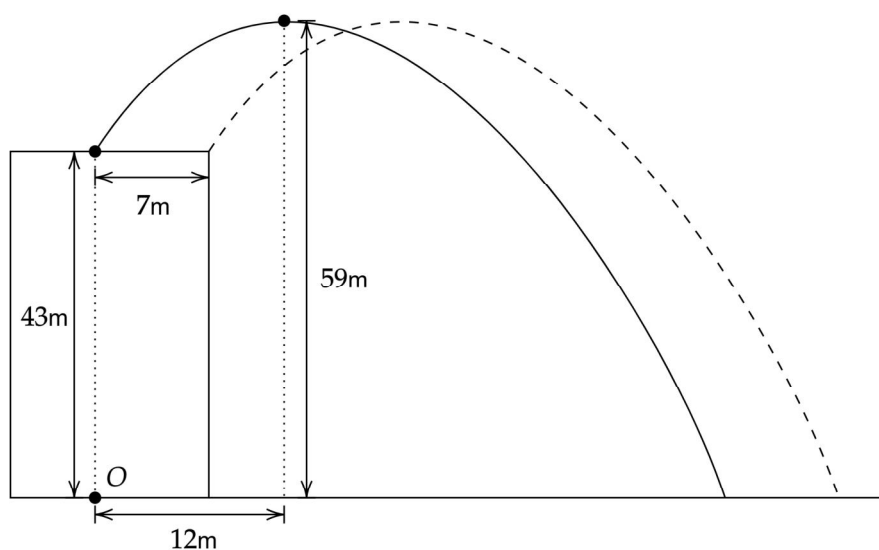


Figura 2: Trayectoria del proyectil lanzado inicialmente (línea negra sólida) y del proyectil luego de haber posicionado la catapulta unos metros adelante (línea discontinua).

- 4.1. [2.0 puntos] Consideren el punto O como el origen de coordenadas y deduzcan en detalle la forma algebraica canónica, dominio y rango, de la función que representa el movimiento parabólico.

Usaremos: $y(x) = a(x-h)^2 + k$;
se sabe $V(h;k) = (12; 59)$

→ $y(x) = a(x-12)^2 + 59$

Para calcular "a" usamos el punto $(0; 43)$

$$43 = a(0-12)^2 + 59$$
$$a = -\frac{1}{9}$$

→ $y(x) = -\frac{1}{9}(x-12)^2 + 59$

Para calcular dominio necesitamos saber el valor de x cuando $y=0$ (alcance horizontal)

$$0 = -\frac{1}{9}(x-12)^2 + 59$$

Resolviendo: $x = 35.04$

→ $\text{Dom } y = [0; 35.04]$

$\text{Ran } y = [0; 59]$

- 4.2. [2.0 puntos] El grupo decide arriesgarse y colocan la catapulta 7 metros adelante. Si las condiciones no han cambiado, escriban la forma canónica, dominio y rango, de la nueva función que representa la trayectoria del proyectil. ¿Qué transformación geométrica se ha llevado a cabo?

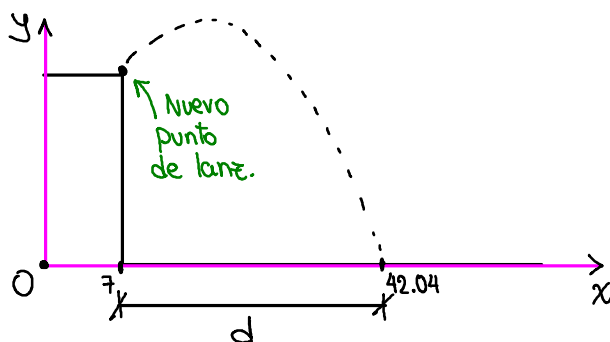
Como se colocó la catapulta 7 m adelante y las condiciones no han cambiado, entonces la transformación geométrica es traslado horizontal 7 m a la derecha.

$$\hookrightarrow y(x-7) = -\frac{1}{9}(x-7-12)^2 + 59 = -\frac{1}{9}(x-19)^2 + 59$$

$$\text{Dom } y = [7; 42.04]$$

$$\text{Ran } y = [0; 59]$$

- 4.3. [1.0 puntos] Luego de haber avanzado los 7 metros, encuentren la distancia horizontal desde el nuevo punto de lanzamiento a la que el proyectil caerá al suelo.



$$d = 42.04 - 7 = 35.04 \text{ m}$$

5. **Composición de funciones:** Un grupo de estudiantes de computación e ingeniería está trabajando en el diseño del procesador C1V20251RS que simulará el plegamiento de las proteínas. Los procesadores modernos ajustan su rendimiento en función de la temperatura para evitar sobrecalentamiento. Cuando un procesador trabaja, genera calor, y su temperatura T (dada en $^{\circ}\text{C}$) puede variar de manera cuadrática en el tiempo bajo ciertas condiciones.

Un procesador tiene una temperatura inicial T_0 y su temperatura sigue la ecuación cuadrática en el tiempo:

$$T(t) = T_0 + at^2, \quad (2)$$

donde a es un parámetro positivo.

En estos sistemas, la velocidad del procesador F , medida en GHz (gigahercios) a menudo

disminuye de manera lineal con la temperatura para evitar daños por sobrecalentamiento. Este fenómeno es conocido como *thermal throttling*.

Cuando la temperatura alcanza cierto límite T_{th} , el procesador reduce su velocidad de manera lineal con la temperatura según la relación

$$F(T) = F_{\max} - k(T - T_{th}), \quad (3)$$

donde k es un parámetro positivo.

- 5.1. [2.0 puntos] Encuentren el tiempo $t = t_{th}$ en el que se alcanza la temperatura $T = T_{th}$ en términos de los parámetros mencionados. ¿Qué unidades debe tener el parámetro a ?

Se quiere t_{th} el cual permitiera alcanzar $T = T_{th}$

$$\rightarrow T_{th} = T_0 + at_{th}^2$$

$$\sqrt{\frac{T_{th} - T_0}{a}} = t_{th}$$

Para ver las unidades de a :

$$[T_{th}] = [T_0] + [a] \cdot [t_{th}]^2$$

$$[\text{temperatura}] = [\text{temperatura}] + [a][\text{tiempo}]^2$$

$$\frac{[\text{temperatura}]}{[\text{tiempo}]^2} = [a] \rightarrow [a] = \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}^2}$$

- 5.2. [1.0 puntos] Expresen la velocidad del procesador como función del tiempo. ¿Qué unidades debe tener el parámetro k ?

Velocidad del procesador:

$$F(T) = F_{\max} - k(T - T_{th})$$

Reemplazando la expresión: $T(t) = T_0 + at^2$

$$F(T) = F_{\max} - k(T_0 + at^2 - T_{th})$$

$$F(T) = F_{\max} - k(at^2 + T_0 - T_{th})$$

Para unidades de k :

$$[F] = [F_{\max}] - [k][T - T_{th}]$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 GHz GHz °C

$$[k] = \frac{\text{GHz}}{^\circ\text{C}}$$

- 5.3. [2.0 puntos] Cuando el procesador reduce su frecuencia a la mitad del valor máximo $F_{\max}$, el equipo se apaga. Calculen el instante $t_{1/2}$ en que esto ocurre.

Cuando $F = \frac{F_{\max}}{2}$ calculemos $t = t_{1/2}$

$$\rightarrow \frac{F_{\max}}{2} = F_{\max} - k(a t_{1/2}^2 + T_0 - T_{th})$$

$$-\frac{F_{\max}}{2} = -k(a t_{1/2}^2 + T_0 - T_{th})$$

Operando . $t_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{F_{\max}}{2k} + T_{th} - T_0}$

- 5.4. [2.0 puntos] ¿Cuál es el dominio temporal, es decir, valores de t , desde el inicio del throttling hasta que el equipo apaga el sistema? Escriban su respuesta en términos de los parámetros mencionados.

El inicio es $t=0$

El equipo se apaga en $t = t_{1/2}$

Por lo tanto $\text{Dom } T = [0, t_{1/2}]$

$$\text{Dom } T = \left[0 ; \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{F_{\max}}{2k} + T_{th} - T_0} \right]$$

Parte III: Postre (Bonus) 🍦

El postre es el broche de oro que cierra una comida, ofreciendo un final dulce y gratificante a la experiencia gastronómica. Aunque opcional, el postre juega un papel significativo al proporcionar un toque de satisfacción después del plato principal. ¿Se les apetece?

6. Analiza el siguiente gráfico, correspondiente a la función f por tramos:

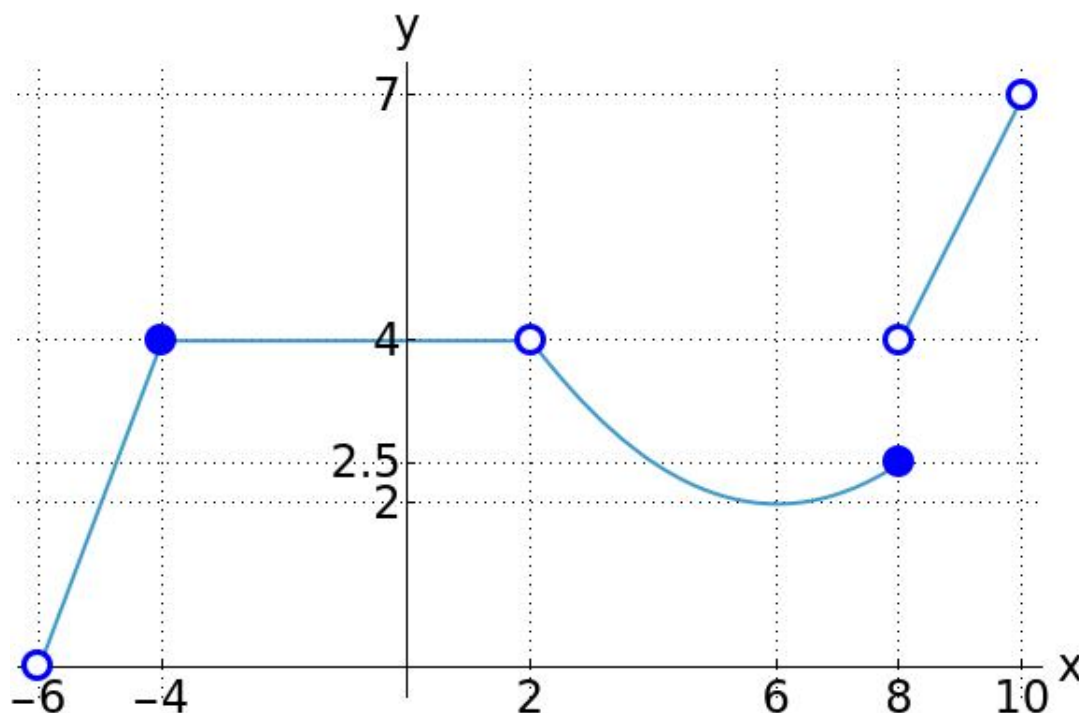


Figura 3: Función $f = f(x)$ definida por tramos.

- 6.1. [0.5 puntos] Encuentra la forma de la función en el tramo $\langle -6, -4 \rangle$.

Recta ; puntos de paso $(-6;0) \wedge (-4;4)$ Usando: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$m = \frac{4 - 0}{-4 - (-6)} = \frac{4}{2} = 2$$
$$y - 0 = 2(x + 6)$$
$$y = 2x + 12$$

- 6.2. [1.0 puntos] Encuentra la forma de la función en el tramo $\langle 2, 8 \rangle$.

Cuadrática $\rightarrow$ Vértice: $(6, 2)$

$$y = a(x - 6)^2 + 2$$

Reemplazando $(2; 4)$

$$4 = a(2 - 6)^2 + 2$$
$$a = \frac{1}{8} \rightarrow y = \frac{1}{8}(x - 6)^2 + 2$$

Trabajen en equipo. Sean cuidadosos y ordenados.

- 6.3. [0.5 puntos] Encuentra la forma de la función en el tramo $\langle 8, 10 \rangle$.

Recta ; puntos de paso $(8; 4) \wedge (10; 7)$

$$m = \frac{7-4}{10-8} = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 4 &= \frac{3}{2}(x - 8) \end{aligned}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 8$$

- 6.4. [1.0 puntos] Escribe la forma algebraica de $f(x)$ y sus subdominios.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+12 & -6 < x \leq -4 \\ 4 & -4 < x < 2 \\ \frac{1}{8}(x-6)^2+2 & 2 < x \leq 8 \\ \frac{3}{2}x-8 & 8 < x < 10 \end{cases}$$

- 6.5. [1.0 puntos] Calcula $f(2)$ y $f(8)$.

$f(2)$ no está definido ya que $2 \notin \text{Dom} f$

$$f(8) = \frac{1}{8}(8-6)^2 + 2 = \frac{5}{2} = 2.5$$

7. [1.0 puntos] Consideren la función $y = f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ (ver Figura 4). Identifique y analice el comportamiento de la función en el numerador y denominador de $f(x)$ por separado en la Figura 4. ¿Cuál es el punto (x, y) discontinuo (el círculo de borde azul y fondo blanco) y qué representa este en la Figura 4? Detallen su respuesta matemáticamente.

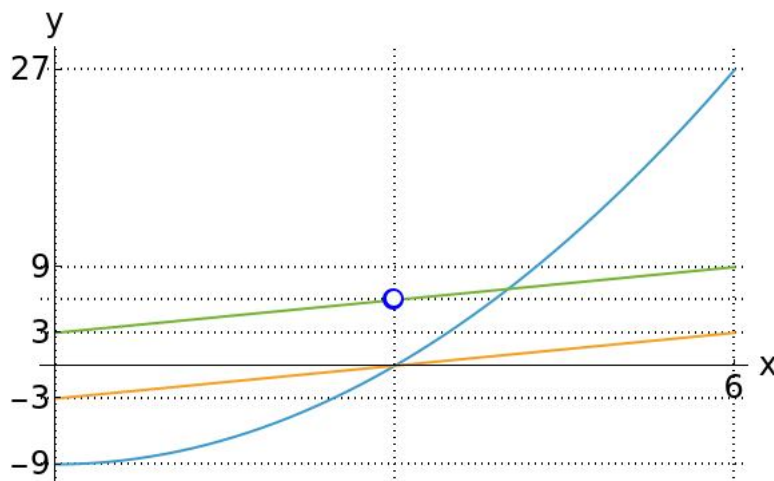


Figura 4: Gráfico de la función $f(x)$.

Del gráfico, se observa

Numerador : $f_1(x) = x^2 - 9$

$$\text{Dom } f_1 = [0; 6]$$

$$\text{Ran } f_1 = [-9; 27]$$

Denominador : $f_2(x) = x - 3$

$$\text{Dom } f_2 = [0; 6]$$

$$\text{Ran } f_2 = [-3; 3]$$

Para función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \rightarrow \text{Dom } f = [0; 6] - \{3\}$

$$\text{Ran } f = [3; 9] - \{6\}$$

El punto discontinuo es (3;6)