

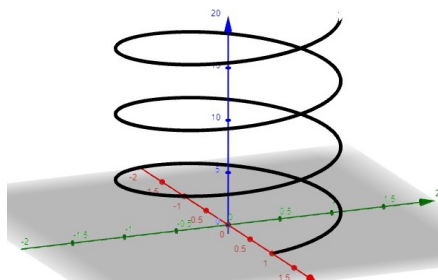
Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo **intento** de copia o sospecha de copia, se anulará el examen **sin opción de reclamo**.

1. Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (7 puntos)

Al analizar el movimiento de una partícula cargada que ingresa en un campo magnético oblicuo, se tiene un movimiento espiral que está definido por la siguiente ecuación $\vec{r} = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$, la trayectoria de dicha partícula se puede observar en la siguiente imagen:



- a) **(2 puntos)** Determine el vector unitario tangencial $\hat{T}$ y el vector unitario normal $\hat{N}$ para cualquier instante de tiempo.
- b) **(2 puntos)** Escoja un instante de tiempo y encuentre la ecuación de la recta tangente en dicho instante. Exprese la ecuación paramétrica de dicha recta.
- c) **(3 puntos)** Use la información del vector unitario normal hallado en el ítem (a) y halle la ecuación cartesiana del plano perpendicular a dicho vector en un instante determinado (Sugerencia: usar el mismo instante de tiempo que se usó en el ítem (b)). Demuestre que dicho plano es paralelo al eje "Z".

Problema 2 (7 puntos)

Cuando un cultivo se siembra sobre una curva a nivel, se impide que el agua corra con velocidad pendiente abajo, ya que las plantas sirven de obstáculo y evitan de esta forma el arrastre del suelo por las lluvias. La superficie de un terreno de cultivo está modelado por la siguiente expresión:

$$S : f(x, y) = \sqrt{x + y^2}$$

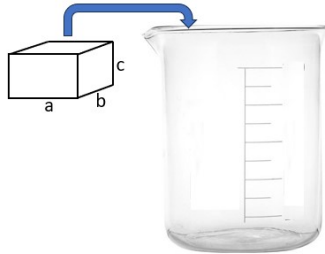
- a) **(3 puntos)** Expresar la forma general de las curvas de nivel e indique los valores que puede tomar la constante. Grafique tres curvas de nivel y bosquejar la posible superficie.
- b) **(2 puntos)** Determinar la derivada direccional de f en el punto $P = (-3, 2)$ siguiendo la dirección hacia el punto $Q = (1, 1)$. ¿Qué dirección se debe seguir para obtener una pendiente mínima?
- c) **(2 puntos)** Considera que: $x = \sin(v)$ y $y = v \cos(u)$. Determinar: $\frac{df}{du}$ cuando $u = \pi$; $v = \frac{\pi}{2}$.

Problema 3 (6 puntos)

En un laboratorio de Química, se necesita medir el volumen de un paralelepípedo metálico. Un grupo de alumnos sugiere medir los lados de la base y la altura, multiplicarlos y así hallar el volumen. Otro grupo sugiere mejor sumergirlo en un recipiente cilíndrico lleno de agua (dicho recipiente tiene un área transversal igual a 3cm^2) y solo medir la altura que aumenta el agua al sumergir el paralelepípedo. Así, la multiplicación de dicha área con la altura de agua, daría el volumen de la paralelepípedo.

El primer grupo midió: $a = 1\text{cm} \pm 0,01\text{cm}$, $b = 2\text{cm} \pm 0,01\text{cm}$ y $c = 1,5\text{cm} \pm 0,01\text{cm}$.

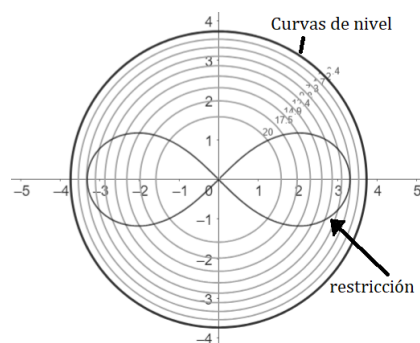
El segundo grupo midió: $h = 1\text{cm} \pm 0,05\text{cm}$.



- (3 puntos)** Estime el error total propagado y el error relativo de la medición del volumen hecha por el primer grupo.
- (3 puntos)** Estime el error total propagado y el error relativo de la medición del volumen hecha por el segundo grupo. ¿Cuál de las dos mediciones es mejor? Justifique su respuesta.

2. Adicional (3 Puntos)

- (1.5 puntos)** Se tiene una función desconocida $Z(x, y)$, pero conocemos los siguientes valores: $Z(2, 3)$, $Z_x(2, 3)$ y $Z_y(2, 3)$. Queremos determinar el valor de la función en el punto $(3, 4)$.
¿Cómo podrías aproximar el valor de $Z(3, 4)$?
¿Dicha aproximación es aceptable? Justifique su respuesta.
- (1.5 puntos)** Se tiene un problema de optimización con restricción, se ha graficado las curvas de nivel de la función a optimizar (función objetivo) y la curva de nivel de la restricción. Señale dónde se ubicarían las soluciones del problema de optimización, justifique su elección.



FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1)$$

2. Sea el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. Recordar el triple producto escalar para hallar el volumen de paralelepípedos. Sea $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores, entonces:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4. Sea la ecuación paramétrica de la recta R :

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t \langle a, b, c \rangle$$

donde

■ $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por donde pasa la recta R .

■ $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta.

■ t es un parámetro variable

5. Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por el vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

6. Vector unitario tangente y vector unitario normal principal

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

7. Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{N}} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} \\ &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} \end{aligned}$$

8. Sea la función $f(x, y, z)$, entonces:

■ Su diferencial total será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

■ De lo anterior, su variación respecto de la variable t será:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

■ Su gradiente ∇f es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

■ Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

■ Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla f(x, y, z)| < D_{\mathbf{u}} f < |\nabla f(x, y, z)| \quad (2)$$

9. Recordar para Δx y Δy pequeños, se cumple lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz$$

y esto significa lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \quad (3)$$

10. Sea $z = f(x, y)$ una función. Una curva de nivel esta dada por la ecuación $z = f(x, y) = k$ para diferentes valores de k . Si $w = f(x, y, z)$, entonces $w = f(x, y, z) = k$ define una superficie de nivel.

11. Recordar que el error propagado de una función $z = f(x, y)$ es Δz y el error relativo es $\Delta z / z$.