

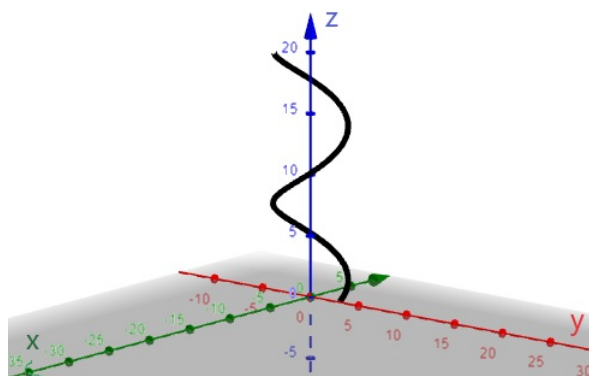
Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo **intento** de copia o sospecha de copia, se anulará el examen **sin opción de reclamo**.

1. Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (7 puntos)

Una persona pasea en una montaña rusa llamada "Montaña Emocionante". El movimiento de la persona en un determinado trayecto de la montaña rusa se puede modelar por la curva descrita por la siguiente ecuación $\vec{r} = 3\cos(t)\mathbf{i} + 3\sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{7}t\mathbf{k}$, donde t es el tiempo medido en segundos y $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la persona en metros.



- a) (2 puntos) Determine el vector unitario tangencial $\hat{\mathbf{T}}$ y el vector unitario normal $\hat{\mathbf{N}}$ para cualquier instante de tiempo.
- b) (2 puntos) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto $t = \frac{\pi}{6}$.
- c) (3 puntos) Use la información del vector unitario normal hallado en el ítem (a) y halle la ecuación cartesiana del plano perpendicular a dicho vector en un instante determinado (Sugerencia: usar el mismo instante de tiempo que se usó en el ítem (b)). Demuestre que dicho plano es paralelo al al vector $\langle 1, -\sqrt{3}, 0 \rangle$.

Problema 2 (7 puntos)

Para determinar la elevación del penacho, (elevación promedio de sustancias gaseosas emitidas por los procesos y actividades industriales) se utiliza la ecuación de Briggs dado por:

$$H = \frac{1,6F^{1/3}d^{2/3}}{U} \quad (1)$$

Donde H representa la elevación del penacho (m), F es el parámetro del flujo por flotación (m^4/s^3), d es la distancia aguas abajo a partir de la cota máxima de la elevación del penacho(m), y U representa la velocidad del viento en la boca de la chimenea (m/s).

Supongamos que los valores de F , d y U son $684 \text{ m}^4/\text{s}^3$, 807 metros y 5 m/s respectivamente y los errores en la medición de F , d y U fueron de 0.01, 0.02 y 0.03 respectivamente.

1. (2 puntos) Determine la elevación del penacho.
2. (3 puntos) Estime el error propagado de la elevación del penacho.
3. (2 punto) Estime el error porcentual en la medición del penacho.

Problema 3 (6 puntos)

Un alpinista se encuentra explorando una región montañosa con un terreno que tiene una elevación variable. La elevación del terreno está modelada por la siguiente expresión:

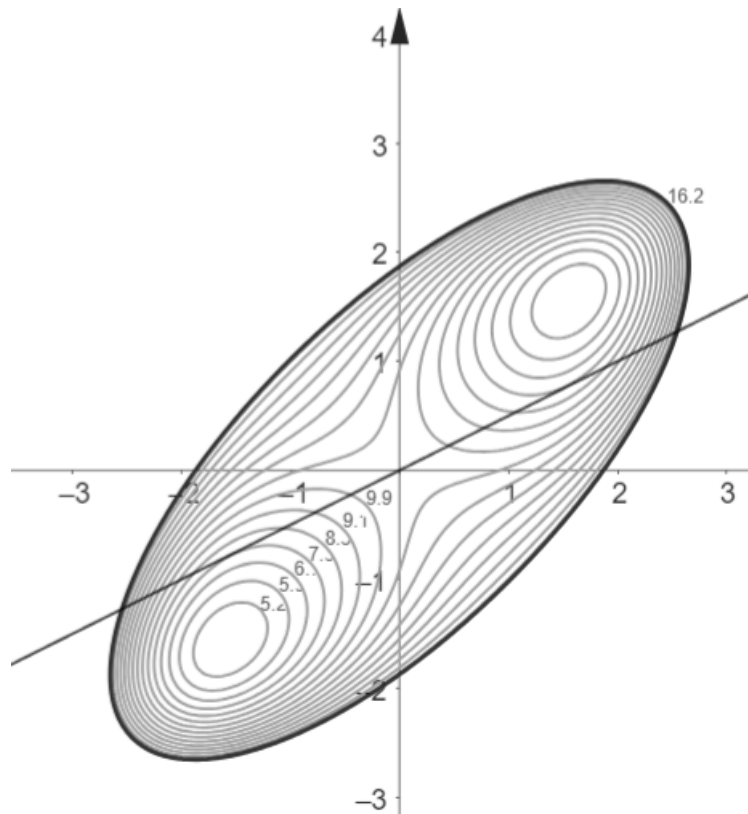
$$E(x, y) = 200 - x^2 - y^2$$

Donde $E(x, y)$ es la elevación del terreno en metros sobre el nivel del mar, x es la distancia en metros hacia el este y y es la distancia en metros hacia el norte.

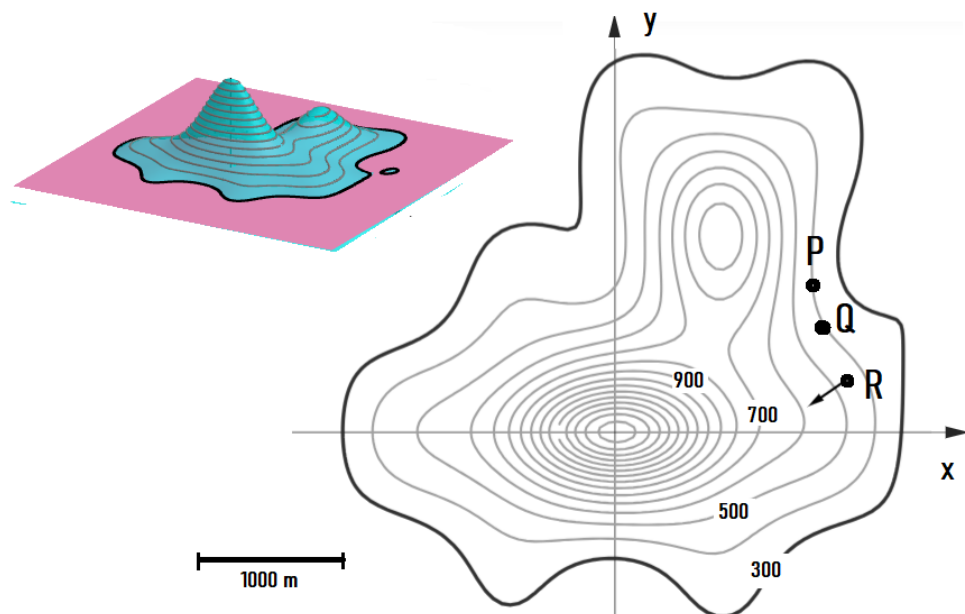
- a) (2 puntos) Grafique tres curvas de nivel y bosqueje la superficie $E(x, y)$.
- b) (2 puntos) Determine la dirección desde el punto de coordenadas (10,5) donde el terreno cambia más rápidamente?
- c) (2 puntos) ¿Cuál es la tasa máxima de elevación desde el punto de coordenadas (10,5) que puedes encontrar en esta región montañosa?

2. Adicional (3 Puntos)

- 1) (1.5 puntos) Se tiene un problema de optimización con restricción, se ha graficado las curvas de nivel de la función a optimizar (función objetivo) y la curva de nivel de la restricción. Señale dónde se ubicarían las soluciones del problema de optimización, justifique su elección.



- 2) (1.5 puntos) Dada la siguiente gira esboze el curso que debe seguir un andinista si sigue la dirección de mayor pendiente. ¿Cuál es la diferencia entre las curvas de ascenso que parte de tres puntos diferentes P, Q y R?



FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2)$$

2. Sea el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. Recordar el triple producto escalar para hallar el volumen de paralelepípedos. Sea $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores, entonces:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4. Sea la ecuación paramétrica de la recta R :

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t \langle a, b, c \rangle$$

donde

■ $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por donde pasa la recta R .

■ $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta.

■ t es un parámetro variable

5. Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por el vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

6. Vector unitario tangente y vector unitario normal principal

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

7. Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{N}} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} \\ &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} \end{aligned}$$

8. Sea la función $f(x, y, z)$, entonces:

■ Su diferencial total será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

■ De lo anterior, su variación respecto de la variable t será:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

■ Su gradiente ∇f es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

■ Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

■ Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla f(x, y, z)| < D_{\mathbf{u}} f < |\nabla f(x, y, z)| \quad (3)$$

9. Recordar para Δx y Δy pequeños, se cumple lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz$$

y esto significa lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \quad (4)$$

10. Sea $z = f(x, y)$ una función. Una curva de nivel esta dada por la ecuación $z = f(x, y) = k$ para diferentes valores de k . Si $w = f(x, y, z)$, entonces $w = f(x, y, z) = k$ define una superficie de nivel.

11. Recordar que el error propagado de una función $z = f(x, y)$ es Δz y el error relativo es $\Delta z / z$.