

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo **intento** de copia o sospecha de copia, se anulará el examen **sin opción de reclamo**.

1. Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (7 puntos)

Se desea encontrar la posición y la aceleración de una partícula en el tiempo t $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$, respectivamente. Se sabe que la velocidad $\mathbf{v}(t) = \langle -\sin(t)-1; 3-3e^{-t}; 6 \rangle$ y la posición inicial es $\mathbf{r}(0) = \langle 2; 4; -1 \rangle$.

Con estos resultados determina

- a) **(2 puntos)** Determina la posición de la partícula en el tiempo t
- b) **(2 puntos)** Indica la componentes normal y tangencial de la aceleración en el tiempo $t = 0$.
- c) **(3 puntos)** Si la curvatura en el tiempo t de la curva esta definida por

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

¿Cuál es la curvatura en el tiempo 0? .

Problema 2 (7 puntos)

La temperatura en un punto (x, y) está dada por:

$$T(x, y) = 200e^{-x^2-3y^2}$$

donde T se mide en $^{\circ}\text{C}$ y x, y en centímetros.

- a) **(2 puntos)** Determine la razón de cambio de temperatura en el punto $P(2, -1)$ en dirección al punto $(3, -3)$.
- b) **(2 puntos)** ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en P ?
- c) **(3 puntos)** Determine la razón de incremento máxima en P .

Problema 3 (6 puntos)

La relación entre la cantidad de luz absorbida por una muestra, A , la concentración de las especies que absorben la luz, C , la distancia (longitud del camino) que recorre la luz a través de la muestra, l , y la absorptividad molar de las especies que absorben la luz, ϵ esta dada por la ley de Beer-Lambert. Esta ley proporciona la siguiente relación

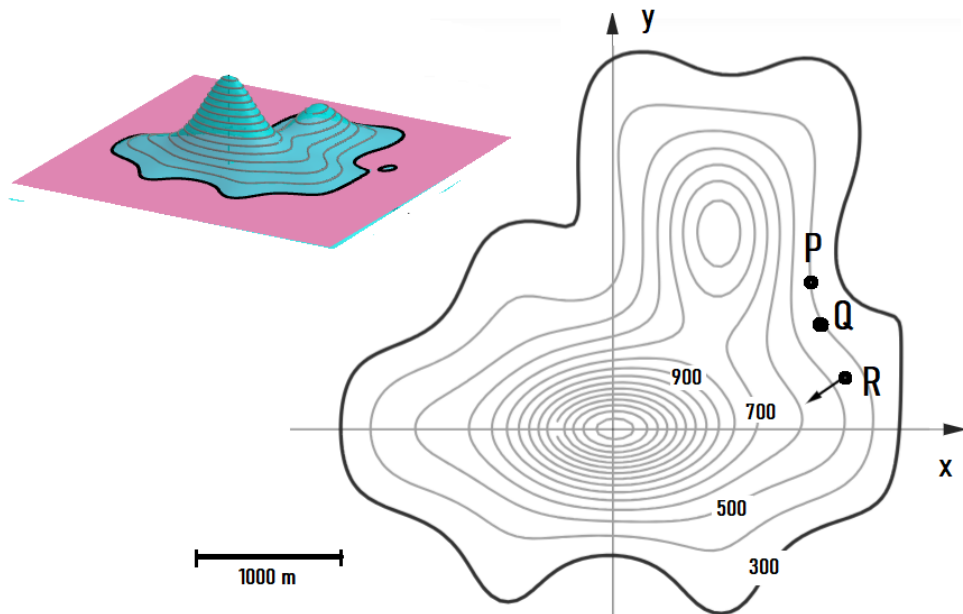
$$\epsilon = \frac{A}{l.C} \quad (1)$$

Supongamos que tenemos una concentración de $13,7(\pm 0,3)$ moles/L, una longitud de camino de 1,0 cm y una absorción de $0,172807(\pm 0,000008)$.

1. (2 puntos) (Determine la absortividad molar esperada.
2. (3 puntos) Determine la incertidumbre (o error de propagación) de la absortividad molar esperada
3. (1 punto) Determine la incertidumbre relativa de la absortividad molar esperada

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

- 1) (1.5 puntos) Dada la siguiente gira esboze el curso que debe seguir un andinista si sigue la dirección de mayor pendiente. ¿Cuál es la diferencia entre las curvas de ascenso que parte de tres puntos diferentes P, Q y R?



- 2) (1.5 puntos) Indique si es verdadero o falsa la siguiente proposición.

Si $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$, entonces $-\sqrt{2} \leq D_u f(x, y) \leq \sqrt{2}$. Justifique,

FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2)$$

2. Sea el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. Recordar el triple producto escalar para hallar el volumen de paralelepípedos. Sea $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores, entonces:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4. Sea la ecuación paramétrica de la recta R :

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t \langle a, b, c \rangle$$

donde

■ $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por donde pasa la recta R .

■ $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta.

■ t es un parámetro variable

5. Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por el vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

6. Vector unitario tangente y vector unitario normal principal

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

7. Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{N}} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} \\ &= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} \end{aligned}$$

8. Sea la función $f(x, y, z)$, entonces:

■ Su diferencial total será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

■ De lo anterior, su variación respecto de la variable t será:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

■ Su gradiente ∇f es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

■ Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

■ Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla f(x, y, z)| < D_{\mathbf{u}} f < |\nabla f(x, y, z)| \quad (3)$$

9. Recordar para Δx y Δy pequeños, se cumple lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz$$

y esto significa lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \quad (4)$$

10. Sea $z = f(x, y)$ una función. Una curva de nivel esta dada por la ecuación $z = f(x, y) = k$ para diferentes valores de k . Si $w = f(x, y, z)$, entonces $w = f(x, y, z) = k$ define una superficie de nivel.

11. Recordar que el error propagado de una función $z = f(x, y)$ es Δz y el error relativo es $\Delta z / z$.