
Nombre del docente: _____

Alumno:

Apellidos: _____ Nombres: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Nota :



Indicaciones:

- La duración es de 1h 30 min.
- La evaluación consta de 3 preguntas
- Se permite el uso de calculadora científica no graficadora ni programable.
- Luego de terminada la evaluación, se deberá subir a Gradescope para que se pueda calificar.
- Cualquier respuesta o procedimiento sin debida justificación, no se tomará en cuenta.

Problema 1

El lanzamiento de una placa metálica describe la siguiente curva:

$$r(t) = \langle t^2 + 1, t + 3, t^3 \rangle$$

- Se quiere determinar el volumen de la placa metálica, conociendo las coordenadas de los vértices de tres aristas que parten de un punto común $A = (4, 3, 2)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (9, 7, 2)$, $D = (12, 4, 5)$.
- Determinar la ecuación de recta paramétrica de la arista BC de la placa metálica.
- Hallar la componente normal y tangencial de la aceleración del movimiento de la placa metálica cuando $t = 2$.

Problema 2

El relave es un sólido líquido compuesto de agua y partículas finas de metales y minerales. Se crea cuando el mineral se tritura y se muele finamente en el proceso de molienda. Una empresa minera solicita a un ingeniero civil construir un tanque de relave cuya área superficial está definida por:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 10$$

- Determinar y graficar las curvas de nivel para $c = -10$, $c = -6$ y $c = -1$. Según las curvas de nivel bosquejar la superficie del tanque de relave.
- Después de unos años se observa que el tanque se ha desgastado debido a los ácidos usados en los procesos mineros, obteniendo así cambios en sus dimensiones x mide $12 \pm 0.01m$ y y mide $8 \pm 0.05m$. Calcule el error relativo en la medición de su área superficial.

Problema 3

El vuelo de un halcón está definido por:

$$f(x, y) = \sin(3x + 4y) + xy - x^2 + 6y + 15$$

- Para $x = -4$ e $y = 3$ usando diferenciales, estimar $f(-3.98, 3.03)$ e indicar el error relativo porcentual.
- Si $x = t^2 - 8$, $y = 3t - 3$. Determina $\frac{df}{dt}$ para $t=1$.
- A partir del punto $(-4, 3)$, ¿En qué dirección la razón de cambio del vuelo del halcón aumenta más rápidamente? y ¿Cuál es el valor máximo?

FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1)$$

2. Sea el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. Recordar el triple producto escalar para hallar el volumen de paralelepípedos. Sea $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores, entonces:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4. Sea la ecuación paramétrica de la recta R :

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t \langle a, b, c \rangle$$

donde

■ $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por donde pasa la recta R .

■ $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta.

■ t es un parámetro variable

5. Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por el vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

6. Vector unitario tangente y vector unitario normal principal

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

7. Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

8. Sea la función $f(x, y, z)$, entonces:

■ Su diferencial total será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

■ De lo anterior, su variación respecto de la variable t será:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

■ Su gradiente ∇f es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

■ Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

■ Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla f(x, y, z)| < D_{\mathbf{u}} f < |\nabla f(x, y, z)| \quad (2)$$

9. Recordar para Δx y Δy pequeños, se cumple lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz$$

y esto significa lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \quad (3)$$

10. Sea $z = f(x, y)$ una función. Una curva de nivel esta dada por la ecuación $z = f(x, y) = k$ para diferentes valores de k . Si $w = f(x, y, z)$, entonces $w = f(x, y, z) = k$ define una superficie de nivel.

11. Recordar que el error propagado de una función $z = f(x, y)$ es Δz y el error relativo es $\Delta z/z$.