
Nombre del docente: _____

Alumno:

Apellidos: _____ Nombres: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Nota :



Indicaciones:

- La duración es de 1h 30 min.
- La evaluación consta de 3 preguntas
- Se permite el uso de calculadora científica no graficadora ni programable.
- Luego de terminada la evaluación, se deberá subir a Gradescope para que se pueda calificar.
- Cualquier respuesta o procedimiento sin debida justificación, no se tomará en cuenta.

Problema 1

Una partícula sigue la siguiente trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 4; 4t^3 + 3; 2t - 5 \rangle$$

- Sea $A = (-4, 3, -5)$, $B = (-3, 7, -2)$, $C = (0, 35, -1)$ y $D = (12, 259, 3)$ los puntos cuando $t = 0, t = 1, t = 2, t = 4$ respectivamente. Hallar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores AB, AC y AD .
- Calcular el plano que contiene a los puntos A, B y C
- Hallar la componente normal y tangencial de la aceleración cuando $t = 9$

Problema 2

El área de una superficie de una estructura metálica es modelado mediante la ecuación $z = f(x, y) = 4x^2 + 9y$,

- Hallar las curvas de nivel cuando $k = 1; k = 4; k = 36$ y luego esbozar la gráfica de la función que representa la superficie de la estructura metálica
- Después de unos años de uso se decide medir el área de la superficie metálica y obtenemos que el x mide $10m$ con un error de medición de $\pm 0.002m$ y y mide $6m$ con un error de medición de $\pm 0.006m$. Calcule el error absoluto y error relativo en la medición del área f .

Problema 3

El área que abarca el oleaje en una playa está dado por la función

$$f(x, y) = e^x y^2$$

- Para $x = 1$ e $y = 3$ usando diferenciales estimar $f(1.002, 2.999)$ e indicar el error relativo porcentual.
- Si $x = u^2 + \cos(w)$, $y = 5 \sin(wu)$. Determinar: $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial w}$
- A partir del punto $(1, 3)$, ¿En qué dirección crece más rápidamente el área que abarca el oleaje? y ¿Cuánto es este valor máximo?

FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1)$$

2. Sea el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. Recordar el triple producto escalar para hallar el volumen de paralelepípedos. Sea $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores, entonces:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4. Sea la ecuación paramétrica de la recta R :

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t \langle a, b, c \rangle$$

donde

■ $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por donde pasa la recta R .

■ $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta.

■ t es un parámetro variable

5. Sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por el vector posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

6. Vector unitario tangente y vector unitario normal principal

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

7. Componentes de la aceleración:

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

8. Sea la función $f(x, y, z)$, entonces:

■ Su diferencial total será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

■ De lo anterior, su variación respecto de la variable t será:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

■ Su gradiente ∇f es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

■ Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

■ Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla f(x, y, z)| < D_{\mathbf{u}} f < |\nabla f(x, y, z)| \quad (2)$$

9. Recordar para Δx y Δy pequeños, se cumple lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz$$

y esto significa lo siguiente:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \quad (3)$$

10. Sea $z = f(x, y)$ una función. Una curva de nivel esta dada por la ecuación $z = f(x, y) = k$ para diferentes valores de k . Si $w = f(x, y, z)$, entonces $w = f(x, y, z) = k$ define una superficie de nivel.

11. Recordar que el error propagado de una función $z = f(x, y)$ es Δz y el error relativo es $\Delta z/z$.