
Nombre del docente: _____

Alumno:

Apellidos: _____ Nombres: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Nota :



Indicaciones:

- La duración es de 1h 30 min.
- La evaluación consta de 3 preguntas
- No se permite el uso de calculadora científica.

Problema 1

(6 puntos)

Considere la superficie de la ecuación

$$z - 1 = (x - 1)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4}$$

- Dibuje las curvas de nivel cuando $z = 1, 2, 3$ y $z = 4$. Indicando el proceso de la misma.
- Conjeture mediante cálculos ¿cuál sería el signo para $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(-1, 1)$?

Problema 2

(7 puntos)

La temperatura en un plano XY está dada por:

$$T(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 - y^2$$

donde la temperatura se mide en Celsius y la distancia en metros.

- Si inicialmente nos encontramos en la posición $P = (x, y) = (-1, 1)$ y nos movemos a lo largo del camino hasta el punto $Q = (x, y) = (-4, 5)$. ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura en la dirección $\overrightarrow{PQ}$?
- ¿Cuál es la máxima razón de cambio de $T(x, y)$ si partimos desde P ?
- En el punto P , ¿existe alguna dirección $\vec{u}$, en el cuál la razón de cambio de $T(x, y)$ sea $0^\circ\text{C}/\text{m}$? Si no existe explique ¿por qué?

Problema 3

(7 puntos)

Dos helicópteros H_1 y H_2 viajan juntos. En el instante $t = 0$, se separan y siguen diferentes trayectorias rectas dadas por

$$H_1 : x = -2 + 75t, \quad y = 4 + 2t, \quad z = t$$

$$H_2 : x = 6 + 110t, \quad y = -3 + 4t, \quad z = -3 + t$$

El tiempo t se mide en horas y todas las coordenadas se miden en millas. Debido a fallas mecánicas, el helicóptero H_2 detiene su vuelo en la coordenada $A = (446, 13, 1)$ y, en un tiempo despreciable, aterriza en $B = (446, 13, 0)$. Dos horas después, H_1 es notificado de esto y se encamina hacia H_2 a 3,5 mph.

- Determine el tiempo en el cual el helicóptero H_2 detiene su vuelo.
- Determine la coordenada C en el cual H_1 es notificado.
- ¿Cuánto tiempo le tomará a H_1 llegar a la posición de H_2 ?
- Determine la recta en su forma paramétrica que pasa por el punto B y C

FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta\end{aligned}$$

donde

- a_x, a_y y a_z son los componentes del vector $\vec{a}$ en los ejes X, Y y Z
- $|\vec{a}|$ es el módulo del vector $\vec{a}$, dado por

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

2. Sean el vector

$$\vec{r} = |\vec{r}| \hat{r}$$

donde el vector dirección unitario $\hat{r}$ se puede expresar mediante

$$\hat{r} = \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

donde θ_x, θ_y y θ_z son los ángulos que el vector $\vec{r}$ forma con los ejes X, Y y Z , respectivamente.

3. La distancia entre dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) viene dado por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

4. Sea el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

5. Recuerde que

- $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos(90) = 0, \quad \sin(90) = 1$

6. La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

7. El vector tangente a $\vec{r}(t)$ es el vector $\vec{T}(t)$, donde

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

y el vector normal a $\vec{r}(t)$ es el vector $\vec{N}(t)$, donde

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

8. Sea la ecuación del plano H

$$H : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

donde

- $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ es un vector normal al plano
- $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece al plano
- $\vec{r} = (x, y, z)$

de lo cual también puede verse la forma

$$H : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

9. Sea la función $T(x, y, z)$, entonces

- Su diferencial total será

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

- De lo anterior, su variación respecto a una variable t es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- Su gradiente ∇T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

- Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\hat{v}$ es

$$D_{\hat{v}}T = \nabla T \cdot \hat{v}$$

- Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla T(x, y, z)| \leq D_{\hat{v}}T \leq |\nabla T(x, y, z)|$$

10. Sea la ecuación paramétrica de la recta R

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c \rangle$$

donde

- $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por el que pasa la recta
- $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta
- t es un parámetro variable