
Nombre del docente: _____

Alumno:

Apellidos: _____ Nombres: _____

Sección: _____ Fecha: _____

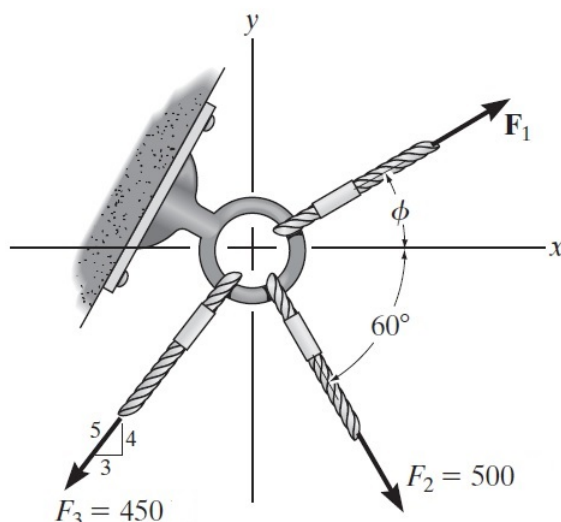
Nota :



Indicaciones:

- La duración es de 1h 30 min.
- La evaluación consta de 3 preguntas
- No se permite el uso de calculadora científica.

Problema 1 (7 puntos)



Del gráfico, el vector resultante que actúa sobre la armella tiene como módulo $250\sqrt{3}$ y actúa en la dirección del Eje Y negativo

- Plantear las ecuaciones en el Eje X
- Plantear las ecuaciones en el Eje Y
- Determinar el ángulo ϕ
- Determinar el módulo del vector F_1

Problema 2 (6 puntos)

Un dron vuela alrededor de una ciudad, realizando la trayectoria definida por la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}(t) = (t + 1)\hat{i} + 2t\hat{j} + (2 + 3t - t^2)\hat{k}$$

- Determine el instante "t" en minutos, donde la velocidad del dron es perpendicular a la aceleración.
- La trayectoria del dron se encuentra en el plano S. Determine la ecuación lineal de dicho plano de la forma $ax + by + cz = d$, si los vectores velocidad y aceleración se encuentran dentro del plano S.

Problema 3 (7 puntos)

La temperatura en un plano XY está dada por:

$$T(x, y) = 3x^2 + 3x^2y + 6y^2$$

donde la temperatura se mide en Celsius y la distancia en metros.

- a) Si inicialmente nos encontramos en la posición $P = (x, y) = (1, 0)$ y nos movemos a lo largo del camino hasta el punto $Q = (x, y) = (4, 4)$. ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura en la dirección $\vec{PQ}$?
- b) ¿Cuál es la máxima razón de cambio de $T(x, y)$ si partimos desde P?
- c) En el punto P, ¿existe alguna dirección $\vec{u}$, en el cuál la razón de cambio de $T(x, y)$ sea $8^\circ\text{C}/\text{m}$? Si no existe explique ¿por qué?

FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta\end{aligned}$$

donde

- a_x, a_y y a_z son los componentes del vector $\vec{a}$ en los ejes X, Y y Z
- $|\vec{a}|$ es el módulo del vector $\vec{a}$, dado por

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

2. Sean el vector

$$\vec{r} = |\vec{r}| \hat{r}$$

donde el vector dirección unitario $\hat{r}$ se puede expresar mediante

$$\hat{r} = \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

donde θ_x, θ_y y θ_z son los ángulos que el vector $\vec{r}$ forma con los ejes X, Y y Z , respectivamente.

3. Sea el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4. Recuerde que

- $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos(90) = 0, \quad \sin(90) = 1$

5. La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

6. El vector tangente a $\vec{r}(t)$ es el vector $\vec{T}(t)$, donde

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

y el vector normal a $\vec{r}(t)$ es el vector $\vec{N}(t)$, donde

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

7. Sea la ecuación del plano H

$$H : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

donde

- $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ es un vector normal al plano
- $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece al plano
- $\vec{r} = (x, y, z)$

de lo cual también puede verse la forma

$$H : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

8. Sea la función $T(x, y, z)$, entonces

- Su diferencial total será

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

- De lo anterior, su variación respecto a una variable t es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- Su gradiente ∇T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

- Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\hat{v}$ es

$$D_{\hat{v}}T = \nabla T \cdot \hat{v}$$

- Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla T(x, y, z)| \leq D_{\hat{v}}T \leq |\nabla T(x, y, z)|$$

9. Sea el volumen de un cilindro circular recto cuya base tenga un diámetro d y una altura h , su volumen es

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

10. Sea el momento de fuerza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde

- $\vec{r}$ es el vector posición del punto en donde se aplica la fuerza
- $\vec{F}$ es el vector fuerza

11. Sea la ecuación paramétrica de la recta R

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c \rangle$$

donde

- $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por el que pasa la recta
- $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta
- t es un parámetro variable